III. rész

Vizsgáljuk a következő feladatot: Legyen n kettőnél nagyobb egész szám. Hányféleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani egy $A_1A_2\dots A_n$ konvex n-szöget? [1]

Ezt a számot f_n-nel jelölve, nyilván $f_3=1$, $f_4=2$, mert a négyszög két átlója közül bármelyiket meghúzva kapunk egy felbontást. Ha $n>4$, csoportosítsuk a felbontásokat aszerint, hogy mi a harmadik csúcsa annak a háromszögnek, amelyiknek egyik oldala A_1A_2. Ha ez a csúcs A_3 vagy A_n, akkor a még maradó $A_1A_3\dots A_n$, ill. $A_2A_3\dots A_n$ $(n-1)$-szöget kell felbontanunk és ez mindegyik esetben f_{n-1}-féleképpen lehetséges. Ha ez a csúcs A_k, ahol $4\le k\le n-1$, akkor az $A_2\dots A_k$ konvex $(k-1)$-szög minden felbontásához választhatjuk az $A_1A_kA_{k+1}\dots A_n$ $(n-k+2)$-szög bármelyik felbontását. Ezek és az $A_1A_2A_k$ háromszög adják az n-szög egy felbontását. A vizsgált felbontások száma tehát a $(k-1)$-szög és az $(n-k+2)$-szög felbontásai számának a szorzata:

$$f_{k-1}f_{n-k+2}.$$

Ha itt k sorra felveszi a $4,\ 5,\ \dots,\ n-1$ értékeket és még hozzávesszük f_{n-1} kétszeresét, akkor számba vettük az n-szög minden felbontását és mindegyiket csak egyszer, tehát

$$f_n=f_{n-1}+f_3f_{n-2}+\dots+f_{k-1}f_{n-k+2}+\dots+f_{n-2}f_3+f_{n-1}.$$

Bár „kétszög"-ről és annak felbontásszámáról nincs értelme beszélni, mégis célszerű lesz bevezetni f_2-t azzal, hogy az jelentsen 1-et, mert így egységesebb és ezzel könnyebben kezelhető lesz a formulánk:

$$f_n=f_2f_{n-1}+f_3f_{n-2}+\dots+f_{n-2}f_3+f_{n-1}f_2. \tag{1}$$

Ezt a rekurzív összefüggést beláttuk, ha $n>4$, de érvényes $n=4$-re, sőt már $n=3$-ra is $(f_3=f_2\cdot f_2)$. Ennek alapján sorra meghatározhatjuk $f_3,\ f_4,\ f_5,\ \dots$ értékét, tudva annyit, hogy $f_1=1$. Az első néhány érték a következő:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

Jó volna azonban olyan formula, amelyiknek a segítségével kiszámíthatjuk f_n-t az előző f-ek ismerete nélkül is.

Hívjuk segítségül ismét a polinomokat, ezúttal a

$$F=f_2+f_3x+\dots+f_nx^{n-2}+\dots$$

polinomot és keressünk rá összefüggést (1) felhasználásával. Szorozzuk meg (1)-et x^{n-2}-nel és a keletkezett egyenlőségeket adjuk össze $n=3,\ 4,\ 5,\ \dots$-re.
Ekkor az

$$f_3x+f_4x^2+\dots+f_{n+2}x^n+\dots=f_2^2x+(f_2f_3+f_3f_2)x^2+\\+\dots+(f_2f_{n+1}+f_3f_n+\dots+f_{n+1}f_2)x^n+\dots$$

polinomegyenlőséget kapjuk. A bal oldalon F áll az $f_2=1$ konstans tag kivételével. A jobb oldalon fellépő együtthatók a polinomok szorzásánál fellépő együtthatókra emlékeztetnek. Valóban, ha F-et önmagával szorozzuk meg (figyelve arra, hogy most az együtthatók indexe 2-vel nagyobb, mint a mellette álló x-hatvány kitevője), akkor a konstans tag f_2^2 és általában az, amivel itt az n-edfokú tag van megszorozva, F^2-ben x^{n-1} együtthatója. Azt kaptuk, hogy

$$F-1=xF^2.$$

Ezzel másodfokú egyenletet nyertünk F-re. Ezt $4x$-szel szorozva és a szokásos módon teljes négyzetté egészítve ki, a következő alakra hozható:

$$1-4x=1-4xF+4x^2F^2=(1-2xF)^2. \tag{2}$$

Ez a gondolatmenet négyzetgyökvonást kíván $1-4x$-ből, tehát olyan polinom keresését, amelynek a négyzete az $1-4x$ polinom. Áttekinthetőség kedvéért próbáljunk először az $1+x$ polinomból négyzetgyököt vonni.

A keresett polinomot így jelöljük:

$$C=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n+\dots,\qquad C^2=1+x.$$

Innen az együtthatókra a következő adódik:

$$c_0^2=1,\qquad 2c_0c_1=1\ \text{ és ha }\ n\ge 2,$$
$$c_0c_n+c_1c_{n-1}+\dots+c_{n-1}c_1+c_nc_0=0, \tag{3}$$

[1] Ez a feladat szerepelt az 1187. feladat II. megoldásához fűzött megjegyzésben. K. M. L. 26 (1963), 126–127. old. A polinomok négyzetgyökével való kapcsolata pedig az 1577. feladat megoldásához fűzött megjegyzésekben. K. M. L. 38 (1969), 55. old.

vagy

$$2c_0c_n = -c_1c_{n-1} - c_2c_{n-2} - \ldots - c_{n-1}c_1, \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Az első egyenlet felhasználásával ez így is írható:

$$2c_1 = c_0, \qquad 2c_n = -c_0(c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_{n-1}c_1).$$

Ez hasonló rekurzív meghatározás a c együtthatókra, mint amilyent korábban az f-ekre nyertünk. Az első néhány érték:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	c_0	$\dfrac{c_0}{2}$	$-\dfrac{c_0}{8}$	$\dfrac{c_0}{16}$	$-\dfrac{5c_0}{128}$	$\dfrac{7c_0}{256}$	$-\dfrac{21c_0}{1024}$	$\dfrac{33c_0}{2048}$

Feltűnik, hogy a nevezők 2 hatványai. Ez azt a gyanút kelti, hogy szorzat alakjában lesz egyszerűen előállítható c_n. Ilyen alak kereséséhez írjuk fel a szomszédos együtthatók hányadosát:

n	0	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{c_{n-1}}{c_n}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{5}{8}$	$-\dfrac{7}{10}$	$-\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{11}{14}$

A harmadik és a hatodik hányadost 3-mal bővítve a nevezők az egymás utáni páros számok lesznek, a számlálók pedig az

$$1, \qquad -1, \qquad -3, \qquad -5, \qquad -7, \qquad -9, \qquad -11$$

sorozatot adják, vagyis 1-től csökkenően az egymás utáni páratlan számokat.

Ennek alapján a kiszámított együtthatók a következő közös formulával írhatók le:

$$c_n = \frac{1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot\bigl(1-2(n-1)\bigr)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}c_0.$$

Azt várjuk, hogy ez érvényes lesz a további n értékekre is. Ennek belátásához azt kell igazolni, hogy ezek kielégítik a (3) összefüggést, hiszen azt tudjuk, hogy c_0 egyértelműen meghatározza azt a c_n sorozatot, amelyiknek tagjaira teljesül (3).

A c_n-re kapott kifejezés emlékeztet a binomiális együtthatókra és még világosabb lesz a hasonlóság, ha a nevezőben és a számlálóban is mindegyik tényező felét vesszük

$$c_n = \frac{\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\ldots\left(\dfrac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}c_0 =$$
$$= \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\dfrac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}c_0.$$

Ez valóban az

(4) $$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots\bigl(m-(n-1)\bigr)}{n!}$$

binomiális együttható c_0-szorosa, csak ezúttal nem n-nél nem kisebb m egész számra tekintettük, hanem az $m = \dfrac{1}{2}$ helyen.

Ha n pozitív egész, (4) az m-nek n-edfokú (tehát véges) polinomja, aminek m tetszőleges értékére vehető a helyettesítési értéke. Ezt a továbbiakban elfogadjuk a binomiális együtthatók kiterjesztett értelmezésének és kiegészítjük a

(4°) $$\binom{m}{0} = 1$$

megállapodással, tetszőleges m-re.

A bevezetett jelöléssel a megvizsgálandó állítás a

$$c_n = \binom{\frac{1}{2}}{n}c_0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

alakban írható. Azt kell eldöntenünk, hogy ez helyes-e, vagyis igaz-e, hogy a

$$C = c_0\left(\binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \ldots\right)$$

polinomra

$$C^2 = 1 + x.$$

Még másképp fogalmazva: a polinom együtthatóira teljesülnek-e – tekintetbe véve, hogy $c_0^2 = 1$ – az

$$\binom{\frac{1}{2}}{0}\binom{\frac{1}{2}}{n} + \binom{\frac{1}{2}}{1}\binom{\frac{1}{2}}{n-1} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}\binom{\frac{1}{2}}{0} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0,\ 1 \\ 0, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases} \tag{5}$$

összefüggések.

A cikksorozat első részében szerepelt hasonló összefüggés a közönséges binomiális együtthatókra: [2] beláttuk, hogy

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}. \tag{6}$$

Elég volna azt belátni, hogy ez a kiterjesztés után is érvényben marad, hiszen akkor (5) bal oldalán

$$\binom{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n} = \binom{1}{n}$$

áll, és ez 1, ha $n = 0$ vagy 1, és 0, ha $n > 1$.

A (6) azonosságot arra az esetre vezettük le, ha az m, n, k egészekre $m + n \geq k \geq 0$. Eközben is már éltünk azzal a megállapodással, hogy ha a bal oldalon fellépnek olyan binomiális együtthatók, amelyekben fölül kisebb szám áll, mint alul, azok jelentsenek 0-t. Ez most következik a (4) definícióból is, viszont ezzel a megjegyzéssel (6) minden nem-negatív egészre érvényes, hiszen ha $m + n < k$, akkor a jobb oldalon 0 áll, de a bal oldalon is minden tagban legalább az egyik tényező 0.

Szeretnénk azonban az összefüggés érvényességét minden m, n értékpárra kiterjeszteni. Egyelőre csak m legyen tetszés szerinti, n jelentsen egy tetszés szerinti, de rögzített nem-negatív egészet. Ekkor a jobb oldalon m-nek egy k-adfokú (véges) polinomja áll. A bal oldalon is minden tag m-nek legfeljebb k-adfokú polinomja, így az összegükre, az egész bal oldalra is ugyanez áll. Azt tudjuk, hogy a két polinomnak minden nem-negatív egész m-re megegyezik a helyettesítési értéke és arra szeretnénk következtetni, hogy ez minden más m értékre is fennáll.

A két oldal különbségét képezve

$$\binom{m+n}{k} - \binom{m}{0}\binom{n}{k} - \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} - \ldots - \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

szintén egy legfeljebb k-adfokú polinom (esetleg a O nulla polinom) és tudjuk, hogy végtelen sok helyen, minden nem-negatív egész m-re, a 0 értéket veszi fel. Viszont egy legfeljebb k-adfokú polinom, ha nem a nulla-polinom, akkor legfeljebb k helyen veheti fel a 0 értéket. [3] A fenti polinom tehát a nulla-polinom. Ekkor azonban a helyettesítési értéke is 0, bármilyen m-re, vagyis (6) minden m értékre fennáll, ha n tetszés szerinti nem-negatív egész.

Most a gondolatmenetet megismételhetjük n-re, ha m-et rögzítjük, de most már nem téve rá semmi megszorítást. Ha m bármilyen rögzített érték, akkor (6) mindkét oldala az n-nek legfeljebb k-adfokú polinomja, tehát e két polinom különbsége is. Tudjuk, hogy ez a különbség végtelen sok helyen, minden nem-negatív egész n-re, a 0 értéket veszi fel, de ez csak úgy lehet, ha ez a különbség a nulla-polinom, tehát minden n értékre a 0 értéket veszi fel. Azt nyertük tehát, hogy (6) minden n értékre fennáll tetszés szerinti m érték mellett, vagyis érvényes minden m, n értékpárra.

Ezzel egyszersmind bizonyítottuk, hogy van olyan (végtelen) polinom, amelyiknek a négyzete $1 + x$, éspedig kettő:

$$c_0\left(\binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \ldots\right),$$

ahol $c_0^2 = 1$, azaz $c_0 = 1$ vagy $c_0 = -1$.

Mi az

$$(1 - 2xF)^2 = 1 - 4x$$

egyenletet kielégítő F polinomot keressük. Ehhez a fenti polinomba x helyébe $-4x$-et kell helyeznünk, és az megadja $1 - 2xF$-et, mégpedig $c_0 = 1$ választással, mert akkor kapunk 1 konstans tagú polinomot:

$$1 - 2xF = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4)x + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n x^n + \ldots$$

[2] K. M. L. 45 (1972), 109. old.

[3] Ezt az állítást kiegészítésül a cikk végén bebizonyítjuk.

Mi az n-szögek háromszögekre bontásának f_n számát kerestük. Ez F-ben az $(n-2)$-edfokú tag együtthatója, tehát a fenti polinomban ennek (-2)-szerese az $(m-1)$-ed fokú tag együtthatója:

$$\begin{aligned}
-2f_n &= \binom{\frac{1}{2}}{n-1}(-4)^{n-1} = \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-2)\right)(-1)^{n-1}4^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= \frac{1\cdot(-1)(-3)\ldots(-2n+5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(-1)^{n-1}4^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-5)\cdot 2^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Itt a jobb oldalt kifejezhetjük közönséges binomiális együtthatóval. Osszuk mindkét oldalt (-2)-vel és bővítsük a törtet $(n-2)!$-sal, a számlálóban ennek minden tényezőjét szorozva 2-vel:

$$\begin{aligned}
f_n &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-5)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-4)}{(n-1)!(n-2)!} = \\
&= \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.
\end{aligned}$$

A cikk elején kiszámított f_n értékekre könnyen ellenőrizhetjük eredményünk helyességét.

Az, hogy a nyert kifejezés egész, tehát hogy a binomiális együttható osztható $(n-1)$-gyel, könnyen látható a

$$(2n-3)\binom{2n-4}{n-2} = (n-1)\binom{2n-3}{n-2}$$

egyenlőségből, ugyanis $(n-1)$ és $(2n-3)$ relatív prímek, ezért a bal oldal csak úgy lehet osztható $(n-1)$-gyel, hogy a binomiális együttható osztható vele. Egyébként ennek alapján írható a felbontásszám

$$f_n = \frac{1}{2n-3}\binom{2n-3}{n-2}$$

alakban is.

*

Kiegészítésül megmutatjuk a felhasznált állítást, hogy egy a nulla-polinomtól különböző polinommal előállított függvénynek nem lehet több nulla-helye, mint a fokszáma. Ezt a fokszám szerint haladó teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Egy nullad-fokú polinom egy 0-tól különböző c konstans. Ez azt a függvényt állítja elő, amelyiknek az értéke mindenütt c, tehát sehol sem 0. A nulla-helyek száma tehát nulla, mint a fokszám.

Tegyük fel, hogy $n \geq 1$, és $(n-1)$-edfokú polinomokra igaz az állítás.
Legyen

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0.$$

Ha ez semmilyen x értékre sem 0, akkor az állítás igaz. Ha

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n = 0,$$

akkor

$$\begin{aligned}
f &= f - f(c) = a_0(x^n - c^n) + a_1(x^{n-1} - c^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x-c) = \\
&= (x-c)\cdot(a_0(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot c + \ldots + c^{n-1}) + a_1(x^{n-2} + \ldots + c^{n-2}) + \ldots + a_{n-1}) = \\
&= (x-c)(a_0x^{n-1} + (a_0c + a_1)x^{n-2} + \ldots + a_0c^{n-1} + a_1c^{n-2} + \ldots + a_{n-1}).
\end{aligned}$$

A második tényező egy $(n-1)$-edfokú polinom. Ez a szorzat valamilyen x értékre csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0. Az első tényező csak $x = c$-re 0, a második pedig az indukciós feltevés szerint legfeljebb $(n-1)$ különböző x értékre lehet 0. Így f legfeljebb n helyen veheti fel a 0 értéket. Ezt akartuk éppen belátni.

*

Nézzük még meg, mennyiben segítettek a feladat megoldásában a polinomok. Hiszen úgy, ahogy a $\sqrt{1+x}$ együtthatóira találtunk formulát, kitalálhattuk volna az első táblázatból is közvetlenül az f_n-t megadó formulát. Akkor is hátra volna azonban még annak igazolása, hogy ez kielégíti az (1) összefüggést. Az ennek megfelelő összefüggést binomiális együtthatókra ismét polinomok felhasználásával bizonyítottuk, ezúttal azonban a véges polinomokkal előállított függvények segítségével. Érdemes megpróbálni ezek felhasználása nélkül igazolni az összefüggést. Ez egyáltalán nem könnyű feladat. Egyébként érdekes, hogy ha az 1972. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2. feladatában szereplő sorbaállítások számát akarjuk meghatározni, ez is hasonló azonosságok igazolását kívánja. [4]

A polinomoknak két különböző szerepét láttuk itt. A megszokottabb a polinomokat olyan kifejezéseknek tekinteni, amelyek bizonyos speciális függvényeket állítanak elő, módot adnak tetszés szerinti x értékre a függvényérték kiszámítására. A cikkben egy másik szempont került előtérbe. A polinomokat formális kifejezéseknek tekintettük, a bennük szereplő x-et (természetesen állhatna helyette z vagy c, vagy bármilyen jel, pl. § vagy akármi) nem is szokás változónak nevezni, hanem határozatlannak. Ez a nézőpont lehetővé tette a polinomok körének kiterjesztését végtelen polinomokra. Meg kellett mondani, hogyan végzünk műveleteket ezekkel a polinomokkal, megvizsgálni a műveletek tulajdonságait. Ezek ismeretében alkalmassá váltak sorozatok, az együtthatóik sorozata tulajdonságainak vizsgálatára.

A kiterjesztés igen hasznosnak bizonyult, mert a végtelen polinomok körében az osztás sokkal általánosabban elvégezhető volt, mint a véges polinomok körében, sőt még a négyzetgyökvonás is lehetővé vált elég tág keretek közt.

Természetesen nem feledkeztünk teljesen el arról sem, hogy a polinomok, legalábbis a véges polinomok, függvényeket is állítanak elő. Az utoljára bizonyított tétel átfogalmazható a következő módon: Ha két véges polinom helyettesítési értéke végtelen sok helyen megegyezik, akkor a két polinom is megegyezik. Ajánljuk az olvasónak a tétel ezen formájának a bebizonyítását. Ez a tétel adja a kapcsot a kétféle szempontból vizsgált polinomok közt.

*

Az egy-egy sorozattal mint együttható sorozattal képzett polinomot nevezik az illető sorozat generátorfüggvényének is. [5] A függvény elnevezés arra utal, hogy itt is beszélhetünk valamilyen értelemben – ha x egy polinomjáról van szó – a polinom által az x egy adott értékéhez hozzárendelt értékről. Ez nem minden polinom esetében lehet (az $x=0$ kivételével) és ha lehetséges, általában akkor sem minden x értékhez. Ezekkel a kérdésekkel a függvénytan foglalkozik. Ha egy végtelen polinomhoz függvényt tudunk rendelni – a függvénytan az ilyen polinomokat hatványsornak nevezi –, akkor már a függvénytan módszereit is segítségül lehet venni ahhoz, hogy a generátorfüggvényen keresztül az együtthatók sorozatának tulajdonságait vizsgáljuk.

A generátorfüggvények köre is kiterjeszthető más típusú függvényekre is, mint a polinomok. Ilyen közvetítéssel vált lehetővé pl. a komplex változós függvénytan módszereinek igen eredményes felhasználása a prímszámok eloszlására vonatkozó kérdések vizsgálatára. De nem folytatom ezt a túlságosan általánosságokban maradó elbeszélést. Mindössze arra akartam rámutatni, hogy milyen távolinak látszó problémakörök között is áll fenn igen gyümölcsöző kapcsolat a matematikában.

*

Visszatérve a végtelen polinomokhoz, említek még néhány problémát, amiken érdemes elgondolkodni. Hasonlókat ki–ki maga is felvethet.

Eredményeink alapján más polinomokból is tudunk már négyzetgyököt vonni. Próbáljunk meg például négyzetgyököt vonni $1/(1-x-2x^2)$-ből – ami szintén végtelen polinom. Több út is kínálkozik rá.

Várható, hogy az

$$1+\binom{\frac{1}{3}}{1}x+\ldots+\binom{\frac{1}{3}}{n}x^n+\ldots$$

polinom köbe lesz 1+x. Ennek az igazolását ajánlom.

Írjuk fel közönséges binomiális együtthatókkal $\binom{-n}{k}$-t, ha n természetes szám. Van-e ennek valamilyen kapcsolata $(1+x)^{-n}$-nel ?

Találkoztunk a cikkben a közönséges binomiális együtthatókra vonatkozó következő összefüggésekkel:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k};\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0,$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^k\binom{n-1}{k},$$

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

[4] Lásd a feladat szövegét ezen számban, az 1. oldalon. *Szerk.*

[5] A generátorfüggvény módszerét *Leonhard Euler* (1707–1783) vezette be és dolgozta ki, egész számok bizonyos feltételeket kielégítő összeadandókra bontásai, ún. *partíciói* számának meghatározására, amilyenekkel e cikksorozat II. része is foglalkozott. A módszer a matematika más ágaiban is – mint pl. a valószínűségszámításban – igen hasznosnak bizonyult.

Melyikek érvényesek ezek közül az általánosított binomiális együtthatókra is, melyikek nem?

Helyesbítések ezen cikksorozat II. részéhez.

A 45. kötet 194. oldalán a (4) képlet 3. sorában a második kiírt tag kettős indexe $k_0\ n$ helyett $k_0\ 0$.

A 199. oldal 2. sorában az első „pedig" helyett: meg.