Gauss-féle binomális együtthatók[*]

II. rész

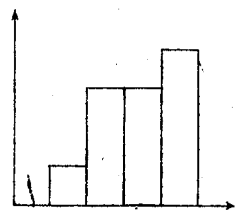
Megismertük [*], a következő összefüggésekkel definiált Gauss-binomiális együtthatókat:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n-r+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^r-1)} \quad 1 \le r \le n, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1. \tag{1.1}$$

Írjuk n-et $n = r+s$ alakban. Beláttuk a 3. pontban, hogy ezek a kifejezések q-nak pozitív egész együtthatós polinomjai:

$$\begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix} = A_{r+s,r,0} + A_{r+s,r,1}q + \ldots + A_{r+s,r,rs}q^{rs}. \tag{3.2'}$$

A 4. pont tétele az ott értelmezett zegzugos utakkal való következő összefüggést mondta ki: $A_{r+s,r,\alpha} a(0,\ 0)$ *pontból az* $(r,\ s)$ *pontba vezető zegzugos utak közül azoknak a száma, amelyek alatti terület* α.



Az 5. pontban a zegzugos utat r darab, egymás mellé helyezett egységnyi alapú téglalapból építettük fel. Ezek alapja vízszintes, magasságuk nem-negatív és s-nél nem nagyobb egész szám; a 0 magasság is előfordulhat. Az alapok a pozitív x tengely mentén sorakoznak a kezdőponttól kezdve, a magasságok nem csökkenő sorozatot alkotnak, és a területek összege (vagy ami ugyanaz, a magasságoké) α, a zegzugos út alatti terület.

6. *Egy újabb megközelítési mód.* Azoknak a zegzugos utaknak a száma, amelyek alatti terület α, megegyezik tehát α-nak r darab nem-negatív egész összeadandóként való előállításai számával. Jelöljük most ezt az előállításszámot $A_{r+s,r,\alpha}$-val, elfelejtve egyelőre ennek a jelnek korábbi, fent is használt jelentését.

Egy szám előállítását bizonyos típusú összeadandókból a szám egy particiójának nevezzük. Ezek elméletének alapjait *Euler* fektette le. [6] Itt az összeadandók nem csökkenő sorrendben következnek, tehát egy előállítás meg van határozva azzal, ha tudjuk, hogy melyik számok szerepelnek összeadandóként és melyik hányszor. Ha tehát pl. a 3 kétszer szerepel egy összegben, azt a 6, 2 számpárral jelölhetjük: a második mutatja, hogy az első szám hány összeadandó összegének tekintendő a particióban.

Ilyen módon, ha egy particióban a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ összeadandók szerepelhetnek csak, akkor ezek mindegyikéhez számpárok egy-egy végtelen sorozatát kell hozzárendelnünk. A párok elemeit egymás alá írva a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s$-hez sorra a következő sorozatok tartoznak:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\
0 & 1 & 2 & & n & \\[6pt]
0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\
0 & 1 & 2 & & n & \\[6pt]
0 & 2 & 4 & \ldots & 2n & \ldots \\
0 & 1 & 2 & & n & \\[6pt]
. & . & . & \ldots & . & \ldots \\[6pt]
0 & s & 2s & \ldots & ns & \ldots \\
0 & 1 & 2 & & n &
\end{array}$$

Mindegyik sorozatból ki kell vennünk egy-egy párt (ha valamelyik összeadandó nem szerepel egy particióban, akkor a sorozat elején álló $(0,\ 0)$ párt), a megfelelő elemeiket összeadni, és ahányféléképpen létrejön ilyen módon az $(\alpha,\ r)$ pár, ez a szám adja meg az α szám r-tagú particióinak a számát, ha a tagok s-nél nem nagyobb, nem-negatív egész számok lehetnek, és sorrendjük elő van írva (nem csökkenő).

[*]Megjelent az Elemente der Mathematik 26 (1971), 102–109. oldalán. Fordította a K. M. L. céljára módosításokkal *Surányi János.*

[**]*Pólya György:* Gauss-féle binomiális együtthatók, I. rész, K. M. L. 45 (1972), 97–102. old.

[6]*Leonhard Euler:* Introductio in Analisin Infinitorum (Lausanne 1784) 1. köt., 253–275. old., vagy: Összegyűjtött művei 1. sorozat 8. köt., 313–338. A szükséges előzmények megtalálhatók *Surányi J.:* Polinomok és végtelen polinomok II. rész c. cikkében. K. M. L. 45 (1972), 193–202. old.

Ezeket a pár-sorozatokat két változó, mondjuk q és x végtelen polinomjaival helyettesíthetjük. Az első elemek sorozatát írjuk q kitevőiként, a másodikat x kitevőjéül. A polinomok tehát

$$\begin{array}{l} 1+x \quad +x^2 \qquad +\ldots+x^n+\ldots \\ 1+qx \;+q^2x^2 \;\; +\ldots+q^nx^n+\ldots \\ 1+q^2x+q^4x^2 \;\; +\ldots+q^{2n}x^n+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+q^sx+q^{2s}x^2+\ldots+q^{sn}x^n+\ldots \end{array}$$

(Az első sorozatban q mindenütt a 0-dik hatványon szerepel.) Ha ezeket összeszorozzuk, akkor minden polinomból kell venni egy-egy tagot, összeszorozni, és ezek összege adja a szorzatpolinomot. Egy ilyen tag képzésénél viszont külön összeadjuk a q-hatványok kitevőit, külön az x-hatványok kitevőit. Ez megegyezik az előbb a párok összeadásáról mondottakkal. Így a szorzatban $q^\alpha x^r$ együtthatója $A_{r+s,r,\alpha}$ lesz.

Másrészt az első polinom $1/(1-x)$-nek polinom-alakja, a többi pedig ebből x helyett qx-et, q^2x-et, $\ldots$, q^sx-et téve adódik. Így, bevezetve a következő jelölést:

$$(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^sx)=g(x), \tag{6.1}$$

azt nyertük, hogy

$$\begin{gathered} 1+(A_{r+s,1,0}+A_{r+s,1,1}q+\ldots+A_{r+s,1,s}q^s)x+ \\ +(A_{r+s,2,0}+A_{r+s,2,1}q+\ldots+A_{r+s,2,2s}q^{2s})x^2+ \\ +\ldots+(A_{r+s,n,0}+\ldots+A_{r+s,n,ns}q^{ns})x^n+\ldots=\frac{1}{g(x)}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Jelöljük itt x^r együtthatóját P_r-rel, vagyis

$$\begin{gathered} P_0=1, \\ A_{r+s,r,0}+A_{r+s,r,1}q+\ldots+A_{r+s,r,rs}q^{rs}=P_r, \qquad \text{ha } r\geq 1. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Ekkor (6.2) így írható:

$$\frac{1}{g(x)}=P_0+P_1x+\ldots+P_rx'+\ldots \tag{6.4}$$

A P_r együtthatók előállítása a célunk. Ehhez felhasználhatjuk a (6.1)-ből közvetlenül adódó következő azonosságot:

$$\frac{1-x}{g(x)}=\frac{1-q^{s+1}x}{g(qx)} \tag{6.5}$$

(vesd össze (2.4)-gyel. I. rész, 98. old.) és figyelembe véve (6.4)-et

$$\begin{gathered} (1-x)(1+P_1x+\ldots+P_rx^r+\ldots)= \\ =(1-q^{s+1}x)(P_0+P_1qx+\ldots+P_rq^rx^r+\ldots). \end{gathered} \tag{6.6}$$

Az egyenlő x-hatványok együtthatóit egybevetve innen adódik, hogy

$$P_r-P_{r-1}=q^rP_r-q^{r+s}P_{r-1} \tag{6.7}$$

vagy

$$P_r=\frac{q^{r+s}-1}{q^r-1}P_{r-1}, \qquad \text{ha } r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.8}$$

Alkalmazzuk ismételten (6.8)-at r csökkenő értékeire, ekkor az (1.1) definíció és (6.3) alapján azt nyerjük, hogy

$$P_r=\begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}=A_{r+s,r,0}+A_{r+s,r,1}q+\ldots+A_{r+s,r,rs}q^{rs}, \tag{6.9}$$

ahol most $A_{r+s,r,\alpha}$ a szóban forgó partició-probléma megoldásainak a számát jelenti, s így a bevezetőben említettek szerint azoknak a zegzugos utaknak a számát is, amelyek alatt α nagyságú terület van. Ezzel újabb bizonyítást is kaptunk a 4. pont tételére.

Ellenőrzésül jegyezzük meg, hogy ha q tart 1-hez, (6.4) a következőbe megy át: [7]

$$\frac{1}{(1-x)^{s+1}} = 1 + \binom{s+1}{1} x + \binom{s+2}{2} x^2 + \ldots + \binom{s+r}{r} x^r + \ldots \tag{6.4*}$$

P_r kiszámítása ebben a pontban rendkívül hasonlít Q_r, kiszámításához a 2. pontban. Most azonban $A_{n,r,\alpha}$ egy kombinatorikus értelmezéséből indultunk ki és ebből jutottunk el a formulához, míg a 4. pontban $A_{n,r,\alpha}$-t mint a (3.2), [ill. (3.2')] formulában fellépő együtthatót definiáltuk és utólag igazoltuk a kombinatorikus értelmét.

7. ***Rövid kitekintés „Gauss-féle polinomiális együtthatókra”.*** [8] Legyen n nem-negatív egész szám és definiáljuk a „Gauss-féle faktoriálist” mint q következő polinomját:

$$\begin{gathered} n!! = \frac{(q-1)(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^n-1)}{(q-1)^n} = \\ 1\cdot(1+q)(1+q+q^2)\cdot\ldots\cdot(1+q+\ldots+q^{n-1}) = \\ = B_{n,0} + B_{n,1}q + \ldots + B_{n,n(n-1)/2}q^{n(n-1)/2}. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Ennek $B_{n,i}$ együtthatói nem-negatív egész számok, foka $n(n-1)/2$. Definiálhatjuk $n!!$-t a

$$0!! = 1 \tag{7.2}$$

kezdeti feltétellel és a következő rekurzív formulával is:

$$(n+1)!! = (1+q+\ldots+q^n)n!! \tag{7.3}$$

Tekintsünk egy n betűből álló ABC-t és az ebben n különböző betűvel leírható „szavakat”. Ezek száma nyilvánvalóan $n!$. Minden ilyen szóban $n(n-1)/2$ betűpár lép fel; akkor mondjuk, hogy egy ilyen pár inverziót alkot, ha az ABC-sorrendben előbbi betű a szóban hátrább áll. Ekkor $B_{n,i}$ *az* $n!$ *szó (permutáció) közül azoknak a száma, amelyekben az inverziók száma*[9] i.

Ez könnyen látható teljes indukcióval a (7.3) rekurziós formula alapján. Vegyünk hozzá a szót alkotó n betűhöz egy új betűt, és ez előzze meg mindegyiket az ABC-sorrendben. Aszerint, hogy az új betű az első, második, harmadik, ..., vagy végül az utolsó helyen áll, az inverziók száma 0-val, 1-gyel, 2-vel, n-nel nő. Pontosan ennek felel meg az, hogy (7.3)-ban az első tényező első, második, harmadik, ..., utolsó tagjával szorozva, q kitevője 0-val, 1-gyel, 2-vel, ..., n-nel nő.

Akár a (7.1) definiáló formulából, akár a kombinatorikus jelentésből következik, hogy

$$B_{n,i} = B_{n,n(n-1)/2-i}, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n(n-1)/2 \tag{7.4}$$

$$B_{n,0} + B_{n,1} + \ldots + B_{n,n(n-1)/2} = n!. \tag{7.5}$$

A Gauss-binomiális együtthatókat írhatjuk ilyen alakban:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!!}{r!!(n-r)!!}. \tag{7.6}$$

Ekkor a többtagúak hatványaiban fellépő polinomiális együtthatók egy Gauss-féle analogonja (háromtagúak esetére)

$$\frac{n!!}{r!!\,s!!\,t!!}, \tag{7.7}$$

ahol $r+s+t=n$ és n, r, s, t nem-negatív egészek; megmutatható, hogy (7.7) is pozitív egész együtthatós polinomja q-nak, fokszáma $rs+rt+st$. Az együtthatóknak itt is lehet kombinatorikus jelentést tulajdonítani: olyan n-betűből álló sorozatok számát adják meg, amelyek minden betűje x, y, vagy z és amelyekben bizonyos inverziók száma adott érték. Minden ilyen betűsorozat tekinthető a háromdimenziós rácsban egy-egy zegzugos út képviselőjének is. Az inverziószám

---

[7] Lásd pl. *Surányi János:* Polinomok és végtelen polinomok I. rész, K. M. L. 45 (1972), 115. old.

[8] Kettőnél több tagúak hatványainak tagokra bontott alakját megadhatjuk a következő gondolatmenet alapján: $(x+y+z)^5$-ben pl. x^2yz^2 alakú tagot úgy kapunk, hogy a hatványt kiírva 5 tényező szorzataként, két tényezőből az x-et, egyből az y-t, kettőből a z-t választjuk ki. Egy ilyen kiválasztást aláhúzással jelölhetünk ki:

$$(\underline{x}+y+z)(x+y+\underline{z})(x+y+\underline{z})(x+\underline{y}+z)(\underline{x}+y+z).$$

Az aláhúzott tagok a tényezők sorrendjében véve az $xxyzz$ betűk egy permutációját (esetünkben az $xzzyx$ permutációt) adják. Az x^2yz^2 tag együtthatója $(x+y+z)^5$ tagokra bontott alakjában eszerint ezeknek a permutációknak a száma lesz: $5!/(2!1!2!) = 30$.

Hasonlóan $(x+y+z)^n$-ben $x^ry^sz^t$ együtthatója, ha $r+s+t=n$, ez lesz: $n!/(r!s!t!)$, és általában $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$-ben, ha $t_1+t_2+\ldots+t_k=n$, az

$$x_1^{t_1}x_2^{t_2}\ldots x_k^{t_k}$$

tag a következő együtthatóval szerepel: $n!/(t_1!t_2!\ldots t_k!)$. Ezeket a számokat nevezzük polinomiális együtthatónak.

[9] Lásd pl, a [4] alatt idézett mű 479: oldalát vagy *E. Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, 2. kiad. (Leipzig, 1927.) 94–97. old.

három terület összegével egyezik meg: a zegzugos útnak a koordinátasíkokon való vetületei alatti területek összegével, de az „alatt” értelmezésével óvatosnak kell lenni.

A még több tagúak hatványaiban fellépő együtthatók Gauss-féle megfelelői hasonlóan értelmezhetők. Ezek is q polinomjai, és a bennük fellépő együtthatók is bizonyos betűsorozatok inverziószámaival vannak kapcsolatban; területekkel kapcsolatos értelmezésük is lehetséges, de nehézkessé válik a dimenziószám növekedésével.