

I. megoldás. Jelöljük meg az adott konvex n -szög csúcsait (pozitív körüljárás szerint) rendre az $1, 2, \dots, n$ számokkal. Minden egyes, a követelményt teljesítő négyes csúcskiválasztásnak megfelel egy olyan számnégyes, amelyben

- A) nincs szomszédos (1 különbségű) számpár,
 B) nem lép föl együtt az 1 és az n szám.

(Ugyanis szomszédos számok, vagy az 1 és n együttes fellépése azt jelentené, hogy a választott négyszög egyik oldala a sokszögnek is oldala volna.) Fordítva, minden ilyen számnégyesnek megfelel egy, az eredeti követelménynek megfelelő csúcsnégyes. Ezek szerint a kívánt csúcsnégyesek számát megadja az A - és B -tulajdonságú számnégyesek száma. Ez utóbbit úgy határozzuk meg, hogy az A -tulajdonságú számnégyesek $N(A)$ számából levonjuk azoknak az A -tulajdonságú számnégyeseknek az $N(\overline{AB})$ számát, melyeknek nincs meg a B tulajdonságuk.

Az $N(A)$ szám meghatározása lényegében azonos feladat az 1970. évi Kürschák-verseny 2. feladatával¹, csupán a lottószámok 90-es száma helyére kell n -et, és az egyszerre kihúzott lottószámok 5-ös száma helyére 4-et helyettesítenünk. Alkalmazzuk ezekkel a változtatásokkal az idézett helyen olvasható I. megoldás gondolatmenetét.

Jelöljük egy megfelelően kiválasztott számnégyes számait növekvő rendben a -val, b -vel, c -vel, és d -vel, így a számnégyes megfelelő volta ekvivalens az

$$(1) \quad 1 \leq a < a + 1 < b < b + 1 < c < c + 1 < d \leq n$$

egyenlőtlenség-lánc teljesülésével. Így pedig a

$$(2) \quad b' = b - 1, \quad c' = c - 2, \quad d' = d - 3$$

jelöléssel teljesül a

$$(3) \quad 1 \leq a < b' < c' < d' \leq n - 3$$

egyenlőtlenség-lánc is. Fordítva, ha az a, b', c', d' számokra teljesül (3), akkor a belőlük (2) szerint származtatott a, b, c, d számokra teljesül (1). Ezek szerint $N(A)$ egyenlő a (3)-nak eleget tevő számnégyesek számával, vagyis az első $(n - 3)$ természetes szánt közül kiválasztható különböző számokból álló (és monoton növekvően elrendezett) számnégyesek számával:

$$N(A) = \binom{n-3}{4}.$$

Ha egy számnégyesnek megvan az A tulajdonsága, de nincs meg a B tulajdonsága, akkor az elemei között szerepel az 1-es és az n , és a másik két elemére

$$(4) \quad 3 \leq b < b + 1 \leq n - 2$$

teljesül, ahol b és c jelöli ezeket az elemeket. A (4)-nek eleget tevő számpárok számát a fentiekhez hasonlóan meghatározva kapjuk, hogy

$$N(\overline{AB}) = \binom{n-5}{2}.$$

Tehát az A - és B -tulajdonságú számnégyesek száma

$$\begin{aligned} N(AB) &= N(A) - N(\overline{AB}) = \binom{n-3}{4} - \binom{n-5}{2} = \\ &= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} - \frac{(n-5)(n-6)}{2!} = \\ &= \frac{(n-5)(n-6)}{4!} (n^2 - 7n + 12 - 12) = \frac{n}{4} \binom{n-5}{3}. \end{aligned}$$

Megjegyzések. **1.** Eredményünk tartalmi szempontból (mind geometriai, mind a végzett számító gondolkodás szempontjából) természetesen csak az $n \geq 8$ esetekre érvényes. $n = 8$ esetén $N = 2$, az egyik megoldás a páratlan, a másik a páros sorszámú csúcsok kiválasztása. Formailag azonban már $n = 5$ esetén helyes eredményt ad a képlet.

2. Valamivel gyorsabban érünk célhoz a következő ötlet alapján. Jelöljük a kiválasztandó csúcsnégyes által meghatározott négyszög csúcsait (pozitív körüljárás szerint) rendre P -vel, Q -val, R -rel és S -sel. Válasszuk ki *először* a P csúcsot az n -szög csúcsai közül (erre n -féle lehetőségünk van), majd *ezután* számozzuk meg a sokszög csúcsait P -ből indulva pozitív körüljárás szerint. A fenti gondolatmenettel könnyen bizonyítható, hogy a további három csúcs választására $\binom{n-5}{3}$ lehetőségünk van, ezáltal $n \binom{n-5}{3}$ négyszöget kapunk. Így azonban minden egyes négyszöget 4-szer

¹Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (amelyek különbsége 1)? – A megoldást lásd: *Lovász László: Az 1970. évi Kürschák József matematikai tanulmányverseny feladatainak megoldása*, K. M. L. 42 (1971) 193 – 198, ezen belül 195 – 197.

állítunk elő – ennyiféleképpen jelölhetjük meg a csúcsait pozitív körüljárás szerint a P, Q, R, S betűkkel –, tehát a különböző négyszögek száma $\frac{n}{4} \binom{n-5}{3}$.

II. megoldás. Az n -szög csúcsai $\binom{n}{4}$ konvex négyszöget határoznak meg, ezek között azonban olyanok is vannak, melyeknek 3, 2, ill. 1 oldala az n -szögnek is oldala. (Mind a 4 oldal csak $n = 4$ esetén lehetne n -szögoldal, de ettől eltekintünk, csak $n \geq 8$ esetére foglalkozunk a kérdéssel.) Megállapítjuk a mondott egyezési esetek számát és kivonással képezzük a keresett N számot.

a) Négyszögünknek 3 oldala akkor közös az n -szöggel, ha 4 egymás utáni csúcsot választunk ki. Ez azt jelenti, hogy csak az elsőt választjuk – ezt n -féleképpen tehetjük –, a többi 3 erre következik.

b) Ha 2 közös oldala van, ez lehet az n -szög 2 szomszédos – vagyis 3 egymás utáni csúcs által alkotott – oldala, vagy 2 távolabb fekvő oldal. Az első módon a 3 egymás utáni csúcsot ismét n -féleképpen választhatjuk meg, a negyedik négyszögcsúcs azonban már nem csatlakozhat ezekhez, ezért $(n-5)$ db n -szögcsúcs közül választható; az ilyen lehetőségek száma tehát $n(n-5)$. A második módon két, az n -szögön szomszédos csúcspárunk lesz. Az első pár első csúcsát ismét n -féleképpen, a második párét $(n-5)$ -féleképpen választhatjuk (ha ugyanis az első pár pl. A_{n-1}, A_n , akkor a második pár első csúcsa A_2, A_3, \dots, A_{n-4} lehet). Az így gondolt $n(n-5)$ összekapcsolásban azonban minden keresett kiválasztást 2-szer kapunk meg, az ilyen négyszögek száma tehát $n(n-5)/2$.

c) Végül ha 1 közös oldala van négyszögünknek az n -szöggel, akkor az ennek megválasztása után maradó $(n-4)$ csúcs közül a hátra levő 2 négyszög csúcsot $\binom{n-4}{2}$ -féleképpen választhatjuk, ezek azonban $n-5$ esetben szomszédosak egymással, tehát az ide tartozó négyszögek száma:

$$n \left\{ \binom{n-4}{2} - (n-5) \right\} = n \binom{n-4}{2} - n(n-5).$$

Mindezek szerint

$$N = \binom{n}{4} - \left\{ n + \left(1 + \frac{1}{2} - 1 \right) n(n-5) - n \binom{n-4}{2} \right\}$$

ami kellő alakítás után egyezik az I. megoldás eredményével.