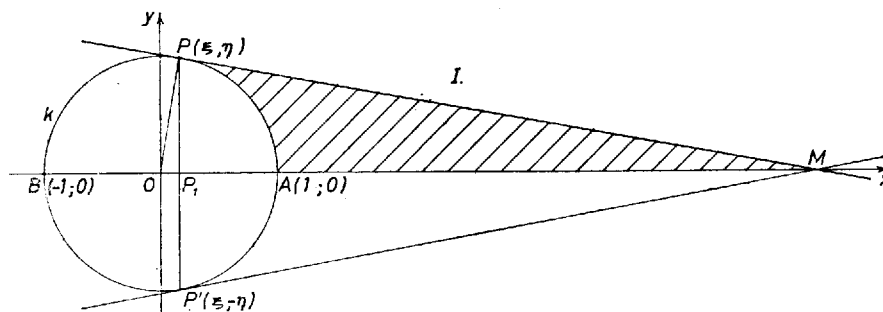


Az adott k körből és az x forgatási tengelyből álló alakzat szimmetrikus az y tengelyre, ezért a kívánt tulajdonságú $P(\xi, \eta)$ érintési pontot elég a kör jobb oldali felén keresni. Sőt elég keresni e félkör felső negyedívén levő P és alsó negyedívén levő P' megfelelő pont közös abszcisszáját, hiszen P' -t úgyis átviszi P -be az a forgatás, amely a kívánt testet előállítja. Így $0 < \xi < 1$ és $0 < |\eta| < 1$, egyenlőség sehol sem állhat a „ $<$ ” jel helyett, mert az $A(1; 0)$ és a $(0; 1)$ pontok nyilvánvalóan nem felelnek meg P -ként. Az I. síknegyedben megtalált P -ből azután a két koordináta-tengelyre és az origóra való tükrözéssel kaphatjuk meg k további 3 megfelelő pontját. (Nyilvánvaló, hogy az I. negyedben csak egy megfelelő pont van, mert ξ -t 1-től csökkentve P és az érintőnek az x tengelyen levő M metszéspontja egyaránt távolodnak A -tól, a kérdéses térfogat monoton nő és átlépi az egységgömb térfogatát.)



A kérdéses F forgástestet a PM , MA szakaszokkal és az AP körívvel határolt síkidom írja le. P -nek az x -en levő vetületét P_1 -gyel jelölve F -et úgy is származtathatjuk, hogy az MPP_1 derékszögű háromszög által leírt K kúpból eltávolítjuk a k által leírt G gömbnek azt a kisebbik S szeletét, melynek alapköre azonos a kúp alapkörével.

M abszcisszája az OPM derékszögű háromszögből

$$OM = \frac{OP^2}{OP_1} = \frac{1}{\xi},$$

így a kúp magassága $OM - OP_1 = (1 - \xi^2)/\xi$, alapkörének területe $\pi\eta^2 = \pi(1 - \xi^2)$. A gömbszelet térfogatának kifejezéséhez az ismert képletek¹ közül azt használjuk fel, amelyben az $m = 1 - \xi$ magasság mellett a gömb sugara szerepel. – A követelmény szerint K és S térfogatának különbsége egyenlő G térfogatával:

$$\frac{\pi(1 - \xi^2)}{3} \cdot \frac{1 - \xi^2}{\xi} - \frac{\pi}{3} (1 - \xi)^2 \{3 - (1 - \xi)\} = \frac{4\pi}{3},$$

amiből rendezéssel

$$\xi^2 - 6\xi + 1 = 0.$$

Látjuk az egyenlet egymás utáni $+1$, -6 , $+1$ együtthatóiból, hogy a gyökök valósak, pozitívok és egymás reciprokai.

Feladatunknak csak az a gyök adja megoldását, melyre $0 < \xi < 1$, tehát $\xi = 3 - \sqrt{8}$. (A másik gyök viszont: $\xi_2 = 3 + \sqrt{8}$, az M helyzetét adja meg). Tehát az adott kör pontjai közül azok felelnek meg az előírásnak, amelyek abszcisszájának abszolút értéke $3 - \sqrt{8} = 0,1716$.

Hegyi Ferenc (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., IV. o. t.)

Heimler László (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem vezet érdemleges munkát igénylő problémára a feladat szövegének az az értelmezése, hogy a megforgatott idomot az ábra PB íve, valamint BM és MP szakaszai határolják, hiszen az így adódó test magába zárja az egységgömböt. Egyenlőség csak $P \equiv A$ esetén adódnék, ennek meglátása, kimondása viszont nem tekinthető feladatnak.

¹Lásd pl.: Hack F.-Kugler S.-né: Függvénytáblázatok. Matematikai és fizikai összefüggések. Tankönyvkiadó. Budapest. 1968. 344. 2 képletek: $v = (\pi/3) m^2 (3r - m)$.