A III. osztályos gimnáziumi fizikakönyv megemlíti (a 116. lapon), hogy Kepler három bolygótörvényéből a Newton–féle gravitációs törvény levezethető.

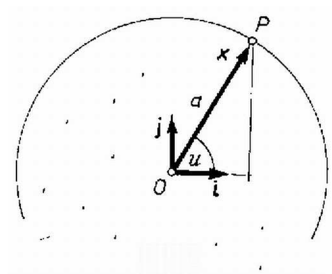
Ebben a cikkben megmutatjuk, miképpen látható be a középiskolai matematika eszközeinek segítségével, hogy a bolygókra a Naptól mért távolság négyzetével fordítottan arányos erő hat.

A Kepler–mozgás származtatása körmozgásból. Vegyünk fel a síkban két merőleges egységvektort, **i**-t és **j**-t. (Ha **i**-t pozitív irányban $\frac{\pi}{2}$ szöggel elforgatjuk, az így kapott vektor legyen egyenlő **j**-vel. A szögeket radiánokban mérjük.)

Az

$$\mathbf{x} = a\big[(\cos u)\mathbf{i} + (\sin u)\mathbf{j}\big] \tag{1}$$

vektor P végpontja – ha u tetszés szerint változhat, a pedig állandó – körpályán mozog, melynek sugara a (1. ábra).

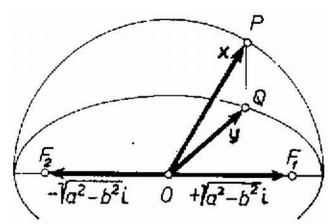


1. ábra

Származtassunk e körből ellipszist összenyomással, szakszerűbben szólva b/a arányú merőleges affinitással ($0 < b/a \leqq 1$); az affinitás tengelye legyen a kör **i** irányvektorú átmérője. A P pont képe az

$$\mathbf{y} = a\big(\cos u\big)\mathbf{i} + b\big(\sin u\big)\mathbf{j} \tag{2}$$

helyvektorú Q pont (2. ábra).



2. ábra

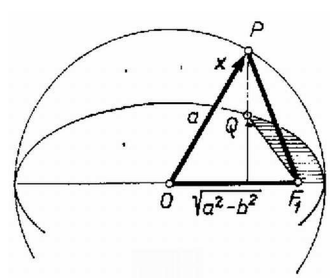
Míg P az a sugarú kört futja be, Q ellipszispályán halad végig. Ezen ellipszis fél nagytengelye a, fél kistengelye b; az a sugarú kör az ellipszis főköre.

Megmutatható, hogy a Q pontnak a $\sqrt{a^2-b^2}\mathbf{i}$ helyvektorú F_1, és a $-\sqrt{a^2-b^2}i$ helyvektorú F_2 pontoktól mért távolság–összege állandó s egyenlő $2a$-val; F_1 és F_2 az ellipszis gyújtópontjai vagy fókuszai.

Q tehát ellipszispályán kering, mint a bolygók Kepler 1. törvénye szerint. E törvény kimondja még, hogy a Nap a pálya egyik gyújtópontjában van.

Kepler időegyenlete. A következőkben összefüggést vezetünk le az u szög s a t idő között Kepler 2. törvénye alapján. Ez megállapítja, hogy a Napot (az egyik fókuszt) a bolygóval összekötő vezérsugár által t idő alatt súrolt terület egyenesen arányos t-vel.

Vizsgáljuk először a körmozgást végző P pontot. Növekedjék a t idő alatt az **x** vektor irányszöge zérusról az u értékre; **x** eközben $\frac{1}{2}a^2u$ területű körcikket súrol. Mekkora az a terület, amelyen ez idő alatt az ellipszis jobb oldali F_1 gyújtópontjából P-hez vont F_1P egyenes szakasz seper végig? (Lásd a 3. ábrát.)



3. ábra

Ezt úgy kapjuk meg, hogy a körcikk $\frac{1}{2}a^2u$ területéből levonjuk az OF_1P háromszög területét. Az előző szakaszban láttuk: F_1 távolsága az O középponttól $\sqrt{a^2-b^2}$; ez a háromszög alapja. Magassága $a\sin u$; a levonandó terület tehát $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}a\sin u$. Az F_1P egyenes szakasz eszerint t idő alatt $\frac{1}{2}a^2(u-\varepsilon\sin u)$ területet súrol, ahol $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$.

Az a terület, melyet az F_1 fókuszból az ellipszispályán haladó Q-hoz húzott F_1Q egyenes szakasz súrol a t idő alatt (a 3. ábrán vonalkázva), az előbb említett területből b/a arányú összenyomással kapható. Számértéke az előbbiének b/a-szorosa:

$$\frac{1}{2}ab(u-\varepsilon\sin u). \tag{3}$$

(Egy A területű síkidomból λ arányú összenyomással kapott síkidom területe λA. Ezt könnyen beláthatjuk pl. háromszög esetében, de igaz bármilyen síkidomra.)

Annak feltétele, hogy az F_1 gyújtópontból Q-hoz vont F_1Q „vezérsugár” által t idő alatt súrolt terület t-vel arányos legyen:

$$u-\varepsilon\sin u=\omega t, \tag{4}$$

ahol $\omega=2\pi/T$ állandó; T az az idő, mely alatt u zérusról 2π-re nő (keringési idő). Ez az összefüggés biztosítja, hogy Q ellipszispályáján a 2. Kepler–törvénynek megfelelően kering; (4) neve: Kepler időegyenlete.

A sebesség. Határozzuk meg a Kepler–mozgást végző Q pont sebességét. Az u szögnek megfelelő t időt részletesebben $t(u)$-val jelöljük, $\mathbf{y}$ helyett is $\mathbf{y}(u)$-t írunk. Ha u-t megnöveljük Δu-val, az $\mathbf{y}$ vektor $\mathbf{y}(u+\Delta u)=y(u)+\Delta\mathbf{y}$-ra, $t(u)$ pedig $t(u+\Delta u)=t(u)+\Delta t$-re változik. A $\Delta\mathbf{y}/\Delta t$ átlagsebesség–vektort így írjuk fel:

$$\frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta t}=\frac{\Delta u}{\Delta t}\frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta u}. \tag{5}$$

Az $\mathbf{y}$ vektort (2) mint u függvényét adja meg, u és t között (4) ad kapcsolatot. Ezen összefüggések alapján (5) jobb oldalának két tényezőjét így írhatjuk:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\omega}{1-\varepsilon\dfrac{\Delta\sin u}{\Delta u}},\quad \frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta u}=a\frac{\Delta\cos u}{\Delta u}\mathbf{i}+b\frac{\Delta\sin u}{\Delta u}\mathbf{j}; \tag{6}$$

itt $\Delta\cos u=\cos(u+\Delta u)-\cos u$, $\Delta\sin u=\sin(u+\Delta u)-\sin u$. Ezeket a kifejezéseket helyettesítsük be (5)-be.

A sebességet a t pillanatban az átlagsebesség határértéke adja meg:

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta t}. \tag{7}$$

A harmonikus rezgőmozgás sebességének és gyorsulásának meghatározásakor megtanultuk, mi a határértéke $\cos u$ és $\sin u$ differenciahányadosának:

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\cos u}{\Delta u}=-\sin u,\quad \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\sin u}{\Delta u}=\cos u. \tag{8}$$

Az (5), (6), (7), (8) egyenleteket felhasználva kapjuk:

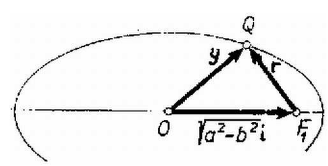
$$\mathbf{v}=\frac{\omega}{1-\varepsilon\cos u}\big[-a(\sin u)\mathbf{i}+b(\cos u)\mathbf{j}\big]. \tag{9}$$

A gyorsulás. A következőkben a Kepler–mozgást végző Q pont gyorsulását határozzuk meg.

Előkészítésképpen bevezetjük az

$$\mathbf{r}=\mathbf{y}-\sqrt{a^2-b^2}\mathbf{i} \tag{10}$$

vektort, mely az F_1 fókuszt Q-val (a Napot a bolygóval) köti össze (4. ábra).



4. ábra

A (2) kifejezés és a $\sqrt{a^2-b^2}=\varepsilon a$ egyenlőség felhasználásával $\mathbf{r}$-et így írhatjuk:

$$\mathbf{r}=a(\cos u-\varepsilon)\mathbf{i}+b(\sin u)\mathbf{j}. \tag{11}$$

Számítsuk ki ezen vektor $\mathbf{r}$ hosszát. Képezve az egymásra merőleges összetevők hosszának négyzetösszegét, Pitagorasz tétele értelmében kapjuk:

$$\mathbf{r}=\sqrt{a^2(\cos u-\varepsilon)^2+(b\sin u)^2}=\sqrt{a^2(\varepsilon^2\cos^2 u-2\varepsilon\cos u+1)}=a(1-\varepsilon\cos u); \tag{12}$$

itt a $\cos^2 u+\sin^2 u=1$ azonosság segítségével $\sin^2 u$-t $\cos^2 u$-val fejeztük ki, majd felhasználtuk a $\sqrt{a^2-b^2}=\varepsilon a$ egyenlőséget, végül a négyzetgyökvonás elvégzésekor figyelembe vettük, hogy $\varepsilon\cos u$ sohasem nagyobb 1-nél.

Rátérünk a gyorsulás kiszámítására. Mialatt a t idő $t+\Delta t$-re növekszik, az u szög Δu-val nő; $\mathbf{v}$ megváltozását a Δt időtartam folyamán jelöljük $\Delta\mathbf{v}$-vel. A $\mathbf{v}$ sebesség (9) kifejezésének felhasználásávala $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ átlaggyorsulást így írhatjuk fel:

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{\omega}{\Delta t}\left\{-a\left[\frac{\sin(u+\Delta u)}{1-\varepsilon\cos(u+\Delta u)}-\frac{\sin u}{1-\varepsilon\cos u}\,\mathbf{i}\right]+b\left[\frac{\cos(u+\Delta u)}{1-\varepsilon\cos(u+\Delta u)}-\frac{\cos u}{1-\varepsilon\cos u}\right]\mathbf{j}\right\}. \tag{13}$$

Hozzuk közös nevezőre a szögletes zárójelben álló hányadosfüggvényeket. A közös nevező $\left[1-\varepsilon\cos(u+\Delta u)\right](1-\varepsilon\cos u)$. Az $\mathbf{i}$ előtt szorzóként álló szögletes zárójel számlálója

$$\sin(u+\Delta u)-\sin u-\varepsilon\left[\sin(u+\Delta u)\cos u-\sin u\cos(u+\Delta u)\right], \tag{14}$$

a $\mathbf{j}$ előtt állóé

$$\cos(u+\Delta u)-\cos u. \tag{15}$$

A $\Delta\sin u=\sin(u+\Delta u)-\sin u$, $\Delta\cos u=\cos(u+\Delta u)-\cos u$ rövidítésekkel (14) a

$$\Delta\sin u-\varepsilon(\cos u\Delta\sin u-\sin u-\Delta\cos u), \tag{16}$$

(15) a

$$\Delta\cos u \tag{17}$$

alakban írható fel. Célszerű ezen kívül (13) jobb oldalát Δu-val megszorozni és elosztani. A $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ átlaggyorsulás számára ezen átalakítások elvégzése után a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta u}{\Delta t}\frac{\omega}{\left[1-\varepsilon\cos(u+\Delta u)\right](1-\varepsilon\cos u)}\left\{+a\left[(1-\varepsilon\cos u)\frac{\Delta\sin u}{\Delta u}+\varepsilon\sin u\frac{\Delta\cos u}{\Delta u}\right]\mathbf{i}+b\frac{\Delta\cos u}{\Delta u}\mathbf{j}\right\}. \tag{18}$$

A gyorsulást a t pillanatban az átlaggyorsulás határértéke adja meg. A $\Delta u/\Delta t$ differenciahányadost (6) alatt felírtuk, a $\sin u$ és a $\cos u$ függvény differenciahányadosának határértékét ismerjük [lásd a (8) képletet]. A nevezőben álló $\left[1-\varepsilon\cos(u+\Delta u)\right]$ határértéke $(1-\varepsilon\cos u)$. A pillanatnyi gyorsulás

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{19}$$

vektora számára így az

$$\mathbf{a}=\frac{\omega^2}{(1-\varepsilon\cos u)^3}\left[a(\cos u-\varepsilon)\mathbf{i}+b(\sin u)\mathbf{j}\right] \tag{20}$$

kifejezést kapjuk (az utolsó lépésben még egyszer figyelembe vettük a $\cos^2 u+\sin^2 u=1$ azonosságot).

A (20) egyenlet jobb oldalán a szögletes zárójelben (11) szerint az $\mathbf{r}$ vektor áll, mely F_1-et Q-val (a Napot a bolygóval) köti össze. A nevezőben $1-\varepsilon\cos u$ pedig (12) értelmében r/a-val egyenlő, ahol r az $\mathbf{r}$ vektornak a hossza. Célszerű lesz bevezetni az $\mathbf{r}^\circ=(1/r)\mathbf{r}$ jelölést ($\mathbf{r}^\circ$ egységvektor, mely az F_1 gyújtópontból Q felé mutat). Mindezt felhasználva, az a gyorsulásvektor számára kapott (20) kifejezés, ha mind a két oldalát megszorozzuk a bolygó m tömegével, a következő alakban írható fel:

$$ma=-m\omega^2a^3\frac{\mathbf{r}^\circ}{r^2}. \tag{21}$$

Newton második mozgástörvénye értelmében a tömeg és a gyorsulás $m\mathbf{a}$ szorzata egyenlő az erővel. Látjuk: a bolygóra a Naptól mért r távolság négyzetével fordítottan arányos erő hat, Newton gravitációs törvényének megfelelően. Ezen erő irányát $a-\mathbf{r}^\circ$ egységvektor határozza meg: az erővektor a bolygótól a Nap felé mutat.

Kepler (4) időegyenletével kapcsolatosan megállapítottuk, hogy $\omega=2\pi/T$, ahol T a keringési idő. Így tehát $\omega^2a^3=(2\pi)^2(a^3/T^2)$. A 3. Kepler–törvény kimondja: az a fél nagytengely köbének s a T keringési idö négyzetének hányadosa a Naprendszer minden bolygójára ugyanaz az érték. (Egyébként más úton meg lehet mutatni, hogy $\omega^2a^3=fM$, ahol M a Nap tömege, f pedig a bolygó s a Nap tömegétől független állandó.)

Megjegyzés. A fentiekben elkerültük a hivatkozást a különféle (pl. a hánvadosfüggvényre, közvetett függvényre érvényes) deriválási szabályokra. Ezekre hivatkozva a levezetést rövidebbé, gépiesebbé tehetjük.