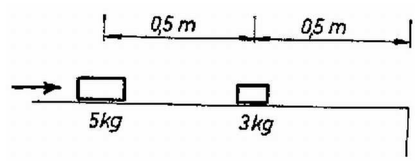
Az I. forduló feladatai:

1. *Az* $m_1 = 5$ kg *és az* $m_2 = 3$ kg *tömegű testek egymástól* $s_1 = 0{,}5$ méterre *állnak. Az* m_2 *tömegű test az asztal szélétől* $s_2 = 0{,}5$ méterre *van. A súrlódási együttható* $\mu = 0{,}102 = 1/9{,}8$*. Mekkora sebességgel kell az* m_1 *tömegű testet a másik felé elindítani, hogy rugalmas ütközés után a) az* m_2 *tömegű, b) az* m_1 *tömegű test épp az asztal széléig jusson el? (1. ábra.)*



1. ábra

Megoldás. A súrlódás következtében egyenletesen lassuló mozgás jön létre $a = \mu g = 1$ m/s^2 negatív gyorsulással. Ha a rugalmas ütközés előtt a tömegek sebessége v_1 és v_2, akkor a rugalmas ütközés után az u_1 és u_2 sebességek az ütközés törvénye szerint:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

A mi esetünkben m_2 tömeg kezdeti sebessége $v_2 = 0$, ezért

(1) $$u_1 = \frac{v_1}{4},$$

(2) $$u_2 = \frac{5}{4} \cdot v_1.$$

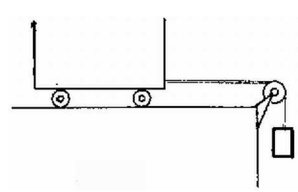
Továbbá a lassuló mozgás $v = v_0 - at$ és $s = v_0t - at^2/2$ törvényeiből az idő kiküszöbölésével:

(3) $$v = \sqrt{v_0^2 - 2as} = \sqrt{v_0^2 - 1m^2/s^2}.$$

Az *a)* kérdés esetében m_2 érkezik az asztal széléhez $v = 0$ sebességgel, tehát indulási sebessége (3) alapján $v_0 = \sqrt{0^2 + 1} = 1$ m/s volt. Ez a rugalmas ütközés u_2 sebessége, tehát (2) alapján $v_1 = 0{,}8$ m/s. Ezzel a sebességgel ütközött az m_1 tömeg. Indulási sebessége (3) szerint $\sqrt{0{,}8^2 + 1}\,$m/s $= \sqrt{1{,}64}\,$m/s $= 1{,}28\,$m/s volt.

A *b)* kérdés esetében m_1 érkezik 0 sebességgel az asztal széléhez, tehát (3) szerint az ütközés helyéről $\sqrt{0^2 + 1} = 1\,$m/s sebességgel indult. Ez számára az ütközéskor u_1, így (1) szerint az ütközés előtti sebessége $v_1 = 4u_1 = 4\,$m/s volt. Eredeti helyéről (3) szerint $\sqrt{4^2 + 1}\,$m/s $= \sqrt{17}\,$m/s $= 4{,}12\,$m/s-mal kellett indulnia.

2. *Téglatest alakú víztartály kis kerekeken gurul (2. ábra). A tartály hossza* 20 cm*, magassága* 10 cm*, szélessége* 10 cm*. Benne a víz magassága* 9 cm*. A kocsi tömege vízzel együtt* 2 kg*. Hogyan mozog a kocsi, ha a csigáról lelógó fonálon* 1,2 kg *tömegű test lóg? A súrlódás elhanyagolható.*



2. ábra

Megoldás. Kezdetben a kocsiban $2\,\mathrm{dm} \cdot 1\,\mathrm{dm} \cdot 0{,}9\,\mathrm{dm} = 1{,}8\,\mathrm{dm}^3$ víz van, amelynek tömege 1,8 kg. A kocsi szerkezetének tömegére 0,2 kg marad.

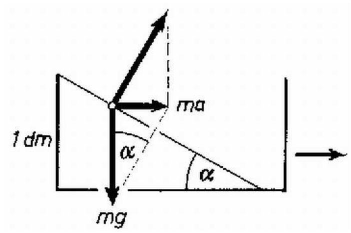
A szokásos kocsikísérletnél m_1 tömegű kocsit m_2 lelógó tömeg súlya egyenletesen gyorsuló mozgással mozgat, amelynek gyorsulása:

(4) $$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

A mi esetünkben $a = 1{,}2g/(2 + 1{,}2) = 3g/8$ volna a gyorsulás.

Ha a kocsi: a benne levő vízzel állandó gyorsulással mozog, akkor a víz felszíne nem marad vízszintes, hanem elferdül, hajlásszöge a vízszinteshez képest α lesz, és erre az α-ra nézve igaz, hogy (3. ábra):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}.$$



3. ábra

Biztosan kicsurog a víz egy része, ezzel megváltozik a kocsi teljes tömege α hajlásszögű vízfelszín esetében a megmaradt víz térfogata:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1\,\mathrm{dm}}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot 1\,\mathrm{dm}\cdot 1\,\mathrm{dm} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}\,\text{liter},$$

tömege $1/(2\operatorname{tg}\alpha)$ kg. A kocsikísérletre érvényes (4) törvényben $m_2 = 1{,}2$ kg, $m_1 = \left[0{,}2 + 1/(2\operatorname{tg}\alpha)\right]$ kg, $a/g = \operatorname{tg}\alpha$, tehát:

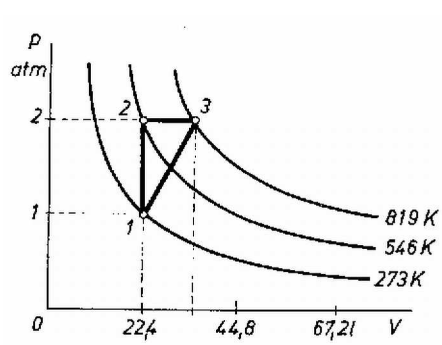
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1{,}2}{0{,}2 + 1/(2\operatorname{tg}\alpha) + 1{,}2}.$$

Az egyenlet megoldása $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, $a = g/2$. Ezzel a gyorsulással mozog a kocsi. Éppen 1 liter víz maradt benne, így kicsordult 0,8 liter. A víz éppen a kocsi jobb oldali sarkáig ér. Ha $\operatorname{tg}\alpha$-ra 0,5-nél kisebb értéket kaptunk volna, ez azt jelentené, hogy a víz trapéz keresztmetszetű hasáb alakjában tölti meg a kocsit, és ekkor eszerint kellett volna a megmaradt víz térfogatát számítani. Mivel feladatunk adatai szerint a kettő közötti határesetről van szó, ezért a térfogat mindegyik számítási módja ugyanarra a helyes eredményre vezet.

Megvizsgálható, hogy a kocsi mozgásállapota stabilis, ami azt jelenti, hogy még több víz kicsurgása mellett egy új, maradandó gyorsulás áll be, a mozgás nem gyorsul fel határtalanul.

3. *Lassan körfolyamatot hajtunk végre* 2 gramm 0 °C *hőmérséklet,* 1 *atmoszféra nyomású,* 22,4 liter *térfogatú hidrogéngázzal. Először állandó térfogaton melegítjük, amíg nyomása* 2 *atmoszféra lesz. Azután állandó nyomáson melegítjük* 546 °C *hőmérsékletig. Végül a pV-diagramban egyenes vonal mentén visszajuttatjuk eredeti állapotába. A hidrogén fajhője állandó térfogaton* 2,4 cal/gr°C*, állandó nyomáson* 3,4 cal/gr°C. a) *Mennyi ennek a folyamatnak a hatásfoka?* b) *Hogyan kell a körfolyamat alkalmával a hőmérsékletet változtatni a térfogat, illetve a nyomás függvényében?*

Megoldás. Felrajzoljuk az 1 mól hidrogéngáz 273 K, 546 K és 819 K hőmérséklethez tartozó izotermáit (4. ábra).



4. ábra

A körfolyamat az 1 ponttal jellemzett helyről indul el. 2-be érve a kétszeres nyomáshoz 2-szeres hőmérséklet, 546 K tartozik; a közben felvett hő $2{,}4\cdot 2\cdot 273\,\mathrm{cal} = 1310\,\mathrm{cal}$. 819 K-re melegítve a hőmérséklet 1,5-szeres, tehát a térfogat is $1{,}5\cdot 22{,}4 = 33{,}6$ lesz (3 pont); közben a felvett hő $3{,}4\cdot 2\cdot 273\,\mathrm{cal} = 1856\,\mathrm{cal}$. A hidrogén összesen $1310 + 1856 = 3166$ cal-t vett fel. A harmadik lépésben, 3-ból 1-be haladva azután bizonyos kalórialeadás megy végbe.

A hatásfokot a munkavégzés és a felvett hőmennyiség hányadosa adja meg. A munkavégzést a diagram által bezárt terület jelenti:

$$W = \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{atm}\cdot 11{,}2\,\mathrm{liter} = 5{,}6\,\mathrm{lit}\cdot\mathrm{atm} = 560\,\mathrm{joule} = 134\,\mathrm{cal}.$$

A hatásfok $134 : 3166 = 0{,}042 = 4{,}2\%$.

Az 1 és 3 pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$\frac{p-p_1}{V-V_1}=\frac{p_3-p_1}{V_3-V_1}.$$

Rendezve:

$$p=\frac{p_3-p_1}{V_3-V_1}\cdot V+\frac{p_1V_3-p_3V_1}{V_3-V_1}.$$

A gáztörvény alapján V helyébe T hőmérsékletet hozzuk be, $V=RT/p$, ekkor a függvény:

$$T=\frac{1}{R}\cdot\frac{p_3-p_1}{V_3-V_1}\cdot V^2+\frac{1}{R}\cdot\frac{p_1V_3-p_3V_1}{V_3-V_1}\cdot V.$$

Tehát az 1–3 úton a hőmérsékletet a térfogat négyzetes függvénye szerint kell változtatnunk. Ugyanilyen függvényt kapunk, ha a nyomást használjuk független változónak. Az 1–2 és a 2–3 változások közben a hőmérsékletet természetesen a nyomással, illetve a térfogattal arányban kell változtatnunk.

A II. forduló feladatai:

1. *Egy űrhajós először r_1 sugarú körpályán T_1 keringési idővel keringett a Föld körül. Űrhajójának kétszeri pályamódosításával pontosan $2r_1$ sugarú körpályára tért át. Az első módosításnál csak a sebességének a nagyságát változtatta, irányát nem. A második pályamódosítást ezután a legelső alkalmas pillanatban hajtotta végre, ekkor viszont sebességének csak az irányát változtatta, a nagyságát nem. a) Hány százalékkal növelte mozgási energiáját az első módosításkor? b) Mekkora szöggel kellett megváltoztatnia a sebességet a második alkalommal? c) Mennyi idő telt el a két pályamódosítás között? (Feltesszük, hogy a sebességváltoztatások a keringési időhöz képest igen gyorsan történtek.)*

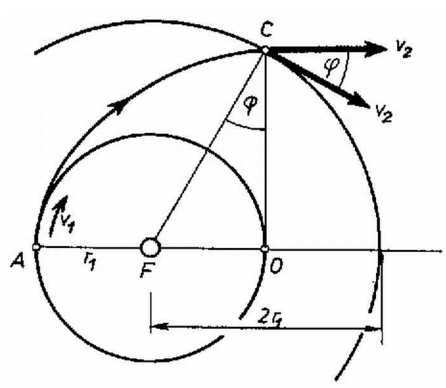
(Bodó Zalán)

Megoldás. Ha m tömeg r sugarú pályán kering az igen nagy M tömeg körül, akkor a centripetális és gravitációs erő egyenlő: $mv^2/r=fMm/r^2$. Innen a körsebesség és a mozgási energia a körpályán:

$$v=\sqrt{\frac{fM}{r}},\qquad \frac{mv^2}{2}=\frac{fMm}{2r}, \tag{5}$$

(f a gravitációs állandó).

A keringő űrhajó összes energiája mozgási és helyzeti energiájának összegével egyenlő. Ha az űrhajó $AF=r_1$ sugarú körpályán kering, akkor mozgási energiája (5) szerint $fMm/2r_1$. A helyzeti energiát az A pontban meglevő helyzeti energiához viszonyítjuk, itt 0-nak számítjuk (5. ábra). Így az összes energia az r_1 sugarú körpályán $fMm/2r_1$.



5. ábra

A $2r_1$ sugarú körpályán a mozgási energia (5)szerint $fMm/4r_1$. A helyzeti energia:

$$\int_{r_1}^{2r_1}\frac{fMm}{r^2}\cdot dr=fMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2r_1}\right)=\frac{fMm}{2r_1}.$$

Tehát a $2r_1$ sugarú körpályán az összes energia:
$fMm/4r_1+fMm/2r_1=3fMm/4r_1$. Látható, hogy az összes energiát $1/2:3/4$ arányban, tehát 50%-kal kell növelni.

Tehát az első pályamódosításkor A-ban 50%-kal kell növelni a mozgási energiát. Ezután az ellipszispályán mindvégig ugyanennyi marad az összes energia. C pontban csak irányváltozás történik, ezért az összes energiában nincs változás a második pályamódosításkor és ez ugyanennyi marad a külső körpályán is, mint az átmeneti ellipszisen.

A mechanika törvényei, a Kepler-törvények szerint a keringő bolygó összes energiája csak a fél nagytengelytől függ. Mivel az átmeneti ellipszisen és a külső körön ugyanannyi az összes energia, a fél nagytengelynek is egyenlőnek kell lennie a két esetben. Ez a külső körnél $2r_1$, tehát ennyi az ellipszis fél nagytengelye is. Ha az A csúcsból felmérjük a $2r_1$ távolságot, akkor az átmeneti ellipszis centrumába jutunk. Ez O-ban van, a kis kör másik oldalán. Minthogy $FC = 2r_1$, CO az átmeneti ellipszis fél kistengelye. A második pályamódosításnak az átmeneti ellipszis kistengelyének végpontjában kell történnie. $FCO\sphericalangle = 30° = \varphi$. Ekkora szöggel kell megváltoztatni a sebesség irányát. Közben az űrhajó energiája változatlan marad, a hajtómű energiakifejtését teljes egészében az égéstermékek kapják meg.

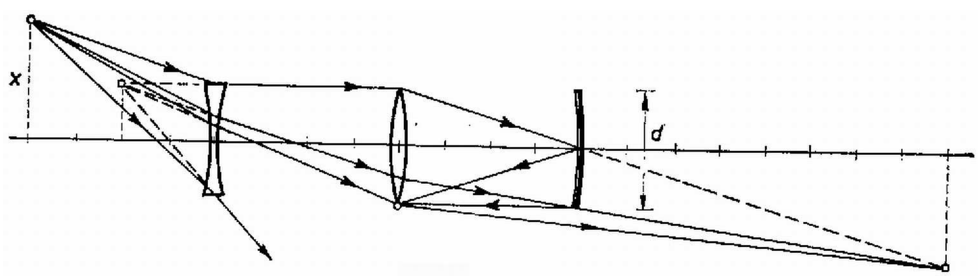
Az átmeneti ellipszisen A és C között eltelt időt Kepler második törvényével kapjuk meg. Ha az átmeneti ellipszisen a keringési idő T_2, akkor a területi sebesség $\pi ab/T_2$. A vezérsugár által leírt terület a negyedellipszis és a háromszög területének különbsége: $\pi ab/4 - ab/4 = ab(\pi - 1)/4$. A keresett időt a terület és a területi sebesség hányadosa adja meg:

$$\frac{ab(\pi-1)}{4} : \frac{\pi ab}{T_2} = \frac{\pi - 1}{4\pi} \cdot T_2 \approx 0{,}17T_2.$$

Kepler harmadik törvénye alapján a második körön (ill. ellipszisen) érvényes keringési idő kifejezhető az első körön szereplő keringési idővel: $T_2 = T_1 \cdot 2\sqrt{2}$.

2. *Az optikai tengelyen 4–4* dm*-es távolságban következnek egymás után: T pontszerű fényforrás,* -4 dm *gyűjtőtávolságú szórólencse,* $+4$ dm *gyűjtőtávolságú gyűjtőlencse és* 8 dm *gyűjtőtávolságú homorú gömbtükör. Mindegyikük átmérője* $d = 2$ dm *(6. ábra). A pontszerű fényforrást kimozdítjuk az optikai tengelyből. Mennyi lehet a merőleges* x *távolság, hogy módunkban legyen a tükör által adott képet ernyőn felfogni?*

(Bodó Zalán)



6. ábra

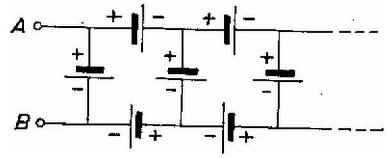
Megoldás. A szórólencse által adott virtuális kép képtávolsága $-4 \cdot 4/(4+4) = -2$ dm, a kép mérete $x/2$. Ez a virtuális kép a gyűjtőlencse számára 6 dm távolságban levő tárgy, amelyről $6 \cdot 4\,\mathrm{dm}/(6-4) = 12$ dm távolságban keletkezik kétszeresen nagyított, tehát ismét x nagyságú reális kép. A homorú gömbtükör számára ez -8 dm távolságban álló virtuális tárgy, amelyről $-8 \cdot 8/(-8-8) = 4$ dm távolságban reális kép keletkezik felére kicsinyítve, tehát $x/2$ méretben.

A végső reális kép éppen a gyűjtőlencse síkjában jön létre, ernyőn való felfogását a lencse akadályozza. Amint az x távolságot növeljük, a képpont is vándorol kifelé. A kép akkor kerül a lencse mellé, ha x nagyobb lesz, mint d, így a kép felfoghatóságának egyik feltétele, hogy $d < x$ legyen. Ha x eléri az $1{,}5d$ értéket, akkor a sugárnyaláb lecsúszik a homorú gömbtükörről és nem kapunk képet. Tehát a feladat megoldása:

$$d < x < 1{,}5d.$$

3. *U elektromotoros erejű és r belső ellenállású galvánelemekből összeállítjuk a 7. ábra szerinti végtelen láncot. Mennyi az elektromotoros erő és a belső ellenállás az* A *és* B *pont között?*

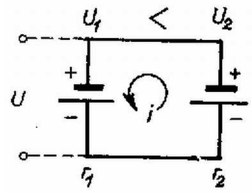
(Vermes Miklós)



7. ábra

Megoldás. A végtelen ellenállásláncra közismert ez az eredmény: $(\sqrt{3} - 1)r$. (L. például az 1957. évi középiskolai tanulmányi verseny II. fordulójának 3. feladatát.) A mi feladatunkban ennyi az elemlánc belső ellenállása.

Vizsgáljunk meg két különböző, párhuzamosan kapcsolt elemet (8. ábra).



8. ábra

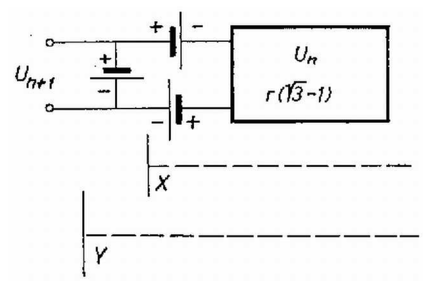
Ezek eredő elektromotoros erejének azt az U feszültséget fogjuk nevezni, amelyet külső terhelő ellenállás nélkül mérhetünk a pólusokon, (bár az elemek belsejében ilyenkor folyik i erősségű áram). Az elem belsejében fellépő feszültségeséseket figyelembe véve:

$$U = U_2 - ir_2,$$
$$U = U_1 + ir_1.$$

Ennek megoldásával az ilyen módon meghatározott elektromotoros erő:

$$U = \frac{U_1 r_2 + U_2 r_1}{r_1 + r_2} \tag{6}$$

Most foglalkozunk az elemlánccal (9. ábra).



9. ábra

Egy igen hosszú részének az elektromotoros ereje legyen U_n belső ellenállása az előbb idézett eredmény szerint $r(\sqrt{3}-1)$. Először hozzákapcsolunk sorba két elemet, ábránkon X-ig haladva. Most az elektromotoros erő $U_2 = 2U + U_n$, a belső ellenállás $r_2 = 2r + r(\sqrt{3}-1) = r(\sqrt{3}+1)$. Ezután az X-ig tartó részhez hozzákapcsolunk még egy elemet $U = U_1$ elektromotoros erővel és $r = r_1$ belső ellenállással, a 9. ábrán Y-ig haladva. A párhuzamos elemek (6) szerinti törvénye alapján az elektromotoros erő:

$$U_{n+1} = \frac{Ur(\sqrt{3}+1) + (2U + U_n)r}{r + r(\sqrt{3}+1)} = \frac{u(\sqrt{3}+3) + U_n}{\sqrt{3}+2}.$$

A végtelen hosszú láncra az jellemző, hogy egy tag hozzácsatolása már alig változtat az eredményen. $U_{n+1} = U_n$ helyettesítés után:

$$U_n = \frac{U(3+\sqrt{3}) + U_n}{\sqrt{3}+2}.$$

Az egyenlet megoldása adja az elemlánc eredő elektromotoros erejét:

$$U_n = \sqrt{3} \cdot U.$$

Az 1972. évi fizika tanulmányi verseny eredménye

I. díj *Imhof Gyula* (Szekszárd, Garay J. Gimn. IV. o. t., Tanára: Póla Károlyné),
II. díj *Gál Péter* (Fazekas M. Gimn. IV. o. t., Tanára: Dr. Szalay Béla),
III. díj *Éber Nándor* (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o .t., Tanára: Kádár Lászlóné) és
Szabó Zoltán (Budapest, Apáczai Csere J. Gimn. IV. o. t. Tanára: Turtóczky Sándor).

A további helyezettek: 5. *Gegus Gábor* (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t., Tanára: Kádár Lászlóné); 6. *Vassel Róbert* (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t., Tanára: Moór Ágnes); 7. *Vermes András* (Eger, Gárdonyi G. Gimn., IV. o. t., Tanára: Palotás József); 8. *Pach János* (Budapest, Veres Pálné Gimn., IV. o. t., Tanára: Kishonti Istvánné); 9. *Tóth Tamás* (Budapest, Jedlik Á. Gimn., IVI o. t., Tanára: Vermes Miklós); 10. *Balog János* (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.; Tanára: Moór Ágnes);