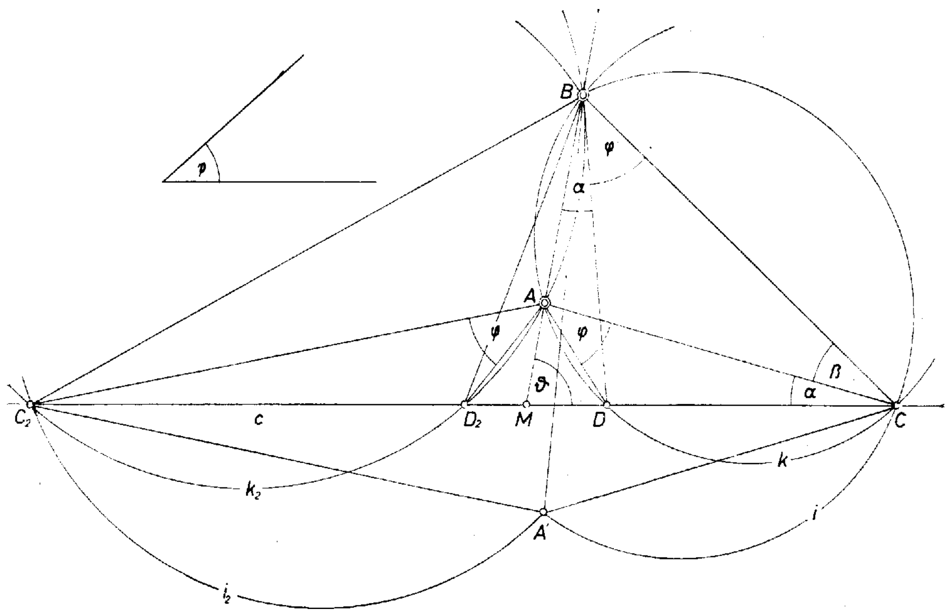
I. megoldás. Jelöljük a c és AB egyenesek metszéspontját M-mel, kisebbik szögüket θ-val ($\theta \leqq 90^\circ$). Mivel a keresett húrnégyszögben A és B, másrészt C és D egyező szerepet játszanak, a betűzést úgy választjuk, hogy $MA < MB$, a négyszög konvex, és így $MD < MC$, hiszen M kívül van a k körülírt körön.



1. ábra

1. Először c-nek az MA félegyenessel θ szöget bezáró félegyenesén keressük D-t és C-t (1. ábra jobb oldali fele). Összefüggéseket keresünk a DA, AB szakaszok C-ből vett látószögei φ és θ között. Legyen $DCA\sphericalangle = \alpha$, $ACB\sphericalangle = \beta$, ekkor a k-ra tekintettel $DBA\sphericalangle = \alpha$, az MBC háromszög szögeinek összege

$$\theta + (\alpha + \beta) + (\varphi + \alpha) = 180^\circ,$$

és innen

$$(1) \qquad 2\,\alpha + \beta = 180^\circ - \theta - \varphi.$$

Itt a jobb oldal ismert, a bal oldalnak pedig látószög jelentést tulajdoníthatunk. Legyen A tükörképe c-re A', ekkor $A'CM\sphericalangle = \alpha$, és $2\,\alpha + \beta = A'CB\sphericalangle$, az $A'B$ ismert szakasznak C-ből vett látószöge. Ebből C megszerkeszthető (az i látókörívet $A'B$-nek természetesen az M-et nem tartalmazó partján kell szerkesztenünk), ezután k az ABC háromszög körülírt köre, végül ennek c-vel való második metszéspontja D.

A kapott $ABCD$ négyszög húrnégyszög, és benne

$$DAC\sphericalangle = DBC\sphericalangle = 180^\circ - BMC\sphericalangle - BCM\sphericalangle - MBD\sphericalangle = (180^\circ - \theta) -$$
$$-(BCM\sphericalangle + MCA'\sphericalangle) - (180^\circ - \theta) - (180^\circ - \theta - \varphi) = \varphi,$$

hiszen $MBD\sphericalangle = ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle = A'CD\sphericalangle = A'CM\sphericalangle$.

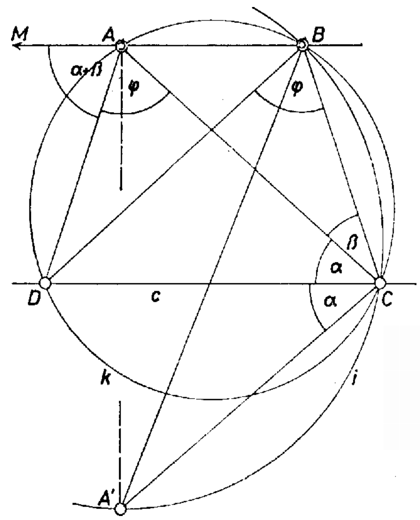
A C pont létrejön, hacsak (1) jobb oldalán $(180^\circ - \theta - \varphi) > 0^\circ$, azaz $\varphi < 180^\circ - \theta$, mert a kimetsző $A'B$ körív két végpontja a c-nek két partján van. E föltétel teljesülése esetén mindig 1 megoldása van a feladatnak.

2. A fenti gondolat megismételhető c-nek másik félegyenesén. A változás csak annyi, hogy θ helyére $(180^\circ - \theta)$ lép, $A'B$-nek az (új) C_2 pontból vett látszöge $(\theta - \varphi)$, és a látókörív az $A'B$ egyenesnek M-et tartalmazó partján szerkesztendő. A fenti föltétel helyére $\varphi < \theta$ lép, emellett 1 megoldás van, különben nincs megoldás (1. ábra bal oldali fele), a megfelelő négyszög ABC_2D_2.

3. Ha éppen $\theta = 90^\circ$, akkor az utóbbi megoldás nyilvánvalóan az előbbinek tükörképe az AB egyenesre – természetesen amennyiben φ hegyesszög.

4. Összefoglalva az eddigieket: ha M létezik és $\varphi < \theta \leqq 90^\circ$, akkor 2 megoldás van, ha $\theta < 90^\circ$ és $\theta \leqq \varphi < 180^\circ - \theta$, akkor 1 megoldás van, végül $\varphi \geqq 180^\circ - \theta$ esetén nincs megoldás.

5. Szerkesztésünk a $c \parallel AB$ esetben is érvényes, azaz ha M nem létezik és $\theta = 0^\circ$.



2. ábra

Ugyanis ezt tudva is megkapjuk a módosult (1)-et, abból, hogy $ACD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, és a húrnégyszög miatt $(\alpha + \beta) + (\varphi + \alpha) = 180^\circ$, tehát $2\,\alpha + \beta = 180^\circ - \varphi$. Ekkor $ABCD$ húrtrapéz, azaz tengelyszimmetrikus trapéz, és csak 1 megoldás van (2. ábra).

Asszonyi Syilvia (Miskolc, Bláthy O. Villamosip. Techn., III. o. t.)

Megjegyzés. Egyszerűbb a szerkesztés a $\varphi = 90^\circ$ speciális esetben. Ekkor CD-t A-ból derékszögben kell látnunk, eleve tudjuk tehát, hogy k középpontja a c-n van, mégpedig az AB szakasz felező merőlegese metszi ki belőle.

Erre az eredményre természetesen a fenti eljárásnak is el kell vezetnie, de várhatóan kissé hosszabb úton. Nézzük meg ezt a $\theta > 0^\circ$ esetben. Ekkor, az i látókörív középpontját O_i-vel jelölve,

$$A'O_iB\sphericalangle = 2 \cdot A'CB\sphericalangle = 2(90^\circ - \theta) = 180^\circ - 2\theta = 180^\circ - A'MB\sphericalangle,$$

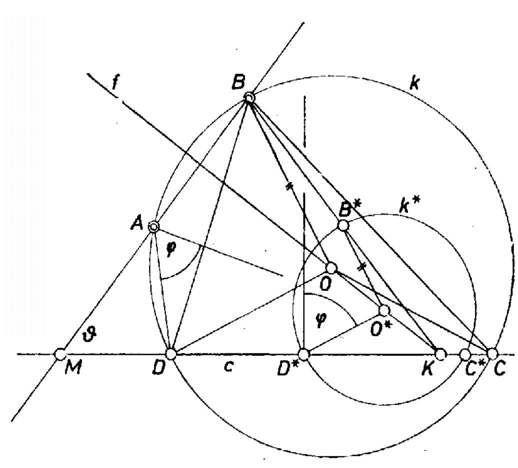
tehát O_i rajta van az $A'BM$ háromszög köré írt körön. Másrészt eleve rajta van $A'B$ felező merőlegesén, tehát O_i felezi e kör $A'B$ ívét, ezért MO_i felezi az $A'MB$ szöget, tehát azonos magával c-vel. O_i tehát a c-n adódik, ezért az i-t tartalmazó $A'BC$ kör átmegy A'-nek c-re való tükörképén, ami maga A, tehát e kör azonos a keresett k-val.

Ugyanezek a $\varphi = 90^\circ$ és $c \parallel AB$ $(\theta = 0^\circ)$ esetben nyilvánvalóak.

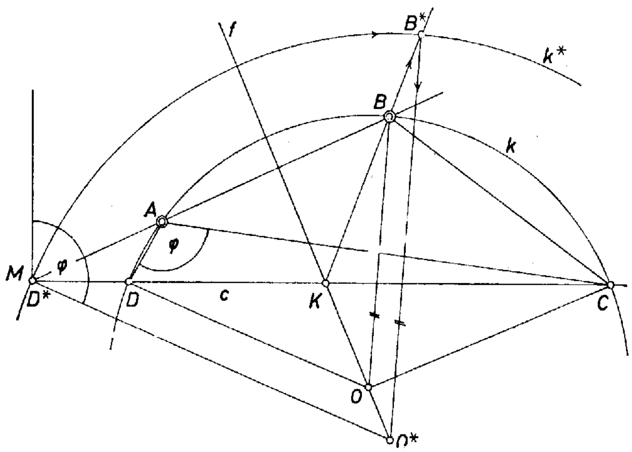
II. megoldás. A keresett $ABCD = N$ négyszög köré írt k kör O középpontjáról a következőket tudjuk. Egyrészt rajta van az AB szakasz f felező merőlegesén, másrészt ha $\varphi < 90^\circ$, úgy $DOC\sphericalangle = 2\cdot DAC\sphericalangle = 2\varphi$, $ODC\sphericalangle = 90^\circ - \varphi$, és O a c-nek A-t tartalmazó partján van; ha pedig $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, akkor $DOC\sphericalangle = 360^\circ - 2\varphi$, $ODC\sphericalangle = \varphi - 90^\circ$, és O a c másik partján van. ($\varphi = 90^\circ$ esetén O a c, f egyenespár metszéspontja, lásd az előző megjegyzést is.) Ennyi elég ahhoz, hogy $\varphi \neq 90^\circ$ esetén N-hez középpontosan hasonló és egyező állású (pozitív nyújtási arányú) $A^*B^*C^*D^* = N^*$ négyszöget szerkeszthessünk, hacsak e transzformáció K középpontjaként f és c metszéspontját vesszük, föltéve, hogy ez létezik (azaz $\theta < 90^\circ$, ezt egyelőre föltesszük).

1. Így ugyanis D a KM félegyenesen lesz, ahol M az AB egyenes metszéspontja c-vel, D^* is ezen adódik, az N^* köré írt k^* kör O^* középpontja pedig f-en, és az O-ra fent mondottak O^*-ra is érvényesek.

Ezek alapján a szerkesztés a következő (a 3a ábrán $\varphi < 90^\circ$, a 3b ábrán $\varphi > 90^\circ$, mindkettőn $0^\circ < \theta < 90^\circ$, a 3$b$ ábrán D^* azonos M-mel).



3a. ábra



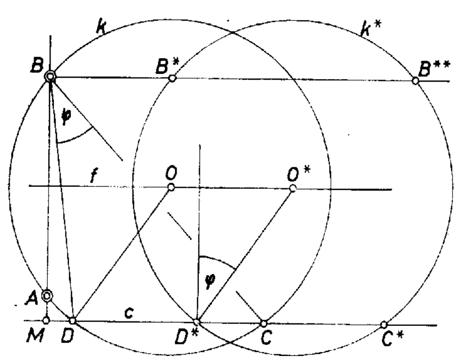
3b. ábra

A KM félegyenes tetszőleges D^* pontjában merőleges félegyenest állítunk c-nek B-t tartalmazó partján. Ebből a D^*K félegyenes felé fordulva fölmérjük φ-t, ennek új szára f-ből kimetszi O^*-ot, k^* sugara O^*D^*, és B^*-ot k^*-ból kimetszi a KB félegyenes. (Elég a továbbiak céljára A^* és B^* egyikét előállítani, egyébként A^*-ot ugyanígy a KA félegyenes metszi ki.) Végül O-t a B-n átmenő, B^*O^*-gal párhuzamos egyenes metszi ki, és ekkor az O körüli, B-n átmenő körnek c-vel való metszéspontjai D és C.

O^* a $\varphi < 90°$ esetben mindenesetre létrejön; $\varphi > 90°$ esetén pedig akkor, ha a felmért φ szög új szára metszi f-et: $\varphi - 90° < 90° - \theta$, azaz $180° - \theta - \varphi > 0°$, ahogyan az I. megoldásban láttuk.

Ha $\varphi < 90°$, és k^* nem zárja magába K-t (C is a KM félegyenesen adódik), azaz $90° - \theta < 90° - \varphi$, tehát $\varphi < \theta$, akkor B^* szerepére 2 pontot és N-re 2 megoldást kapunk – ilyen helyzetre vezetne az 1. ábra adatrendszere (A, B, c kölcsönös helyzete és φ értéke). Ha k^* átmegy K-n ($\varphi = \theta$) vagy magába zárja ($\theta < \varphi < 180° - \theta$), akkor 1-et.

2. K akkor és csak akkor nem jön létre, ha $AB \perp c$. Ekkor $f \parallel c$, és elég, ha meggondolásunk elejét így módosítjuk: „toljuk el N-et c-vel párhuzamosan valamely N^* helyzetbe" (4. ábra).



4. ábra

A c-n tetszőlegesen fölvett D^*-ből kiindulva O^*-ot, k^*-ot ($\varphi < 90°$ esetén) a föntiekhez hasonlóan kapjuk, B^*-ot (B^{**}-ot) a B-n átmenő c-vel párhuzamos egyenes metszi ki k^*-ból, végül a $B^*C^*D^*$ háromszöget a $\overrightarrow{B^*B}$ vektorral a helyére toljuk. B^* létrejön, mert B annyira van f-től, mint A, tehát közelebb van f-hez, mint a c-n levő D^*, tehát távolsága kisebb, mint k^* sugara. – B^{**}-ból persze az első megoldás tükörképét kapjuk.

Megjegyzés. Megoldható a feladat inverzió alkalmazásával is.