A testek mechanikai mozgását a Newton-törvények írják le. Newton II. tövénye szerint egy tömegpontra vagy merev testre

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a},$$

ahol m a vizsgált test tömege, $\vec{a}$ a tömegközéppont gyorsulása és $\vec{F}$ a testre ható külső erők eredője. Merev testekre még az

$$M = \Theta \cdot \beta$$

egyenlet is felírható[1], amely a II. törvény következménye. Itt Θ a merev test tehetetlenségi nyomatéka a súlyponton áthaladó (vagy a pillanatnyi) forgástengelyre vonatkoztatva, β a test szöggyorsulása és M a testre ható külső erők tömegközépponton áthaladó (vagy a pillanatnyi) forgástengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékainak eredője. Ezekkel az egyenletekkel (mozgásegyenletekkel) a tömegpontok vagy merev testek mozgása leírható, csatolva hozzájuk a gyorsulások közötti összefüggéseket megadó kényszeregyenleteket. Természetesen ismernünk kell a testre ható különböző erőket. Leggyakrabban a két test közötti nyomóerő (nyomó- és súrlódási erő) fordul elő, az ezzel kapcsolatban felmerülő problémákat mutatjuk be néhány feladat megoldása közben.

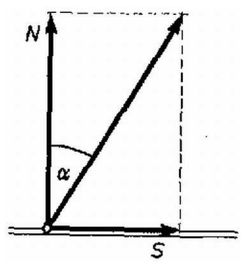
A két merev test (a továbbiakban test) közötti kölcsönhatás, ha az érintkező felületek nagyon simák, a tapasztalat szerint merőleges a közös érintősíkra. Ha a felületek nem ideálisan simák, a kölcsönhatás iránya ettől a merőlegestől eltérhet. Ennek az eltérésnek a maximális szöge ($\alpha_{\max}$) a testek anyagi minőségétől, felületük simaságától függ; a táblázatokban a szög tangensét szokták megadni ($\mu = \operatorname{tg} \alpha_{\max}$). A testek közötti kölcsönhatás tehát olyan irányú, hogy a közös érintő síkra merőleges egyenessel bezárt szöge kisebb vagy egyenlő ($\alpha_{\max}$)-mal:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu$$

(a tangens függvény monoton).

Ha az érintkező felületek egymáshoz képest mozognak (egymáson csúsznak), mindig az egyenlőség jele érvényes.[2]

A testek közötti kölcsönhatást két adattal jellemezhetjük: az erő nagyságával és irányával. Ezzel a két adattal ekvivalens az erő két merőleges összetevőjének megadása: a közös érintősíkra merőleges és a síkkal párhuzamos komponens (1. ábra).



1. ábra

Az utóbbi csak akkor lép fel, ha a felületek nem tökéletesen simák, neve súrlódási erő (S), a merőleges komponens neve nyomóerő vagy kényszererő (N). Az előbbi egyenlőtlenség tehát így írható:

$$\operatorname{tg} \alpha = S/N \leq \mu, \qquad \text{azaz} \qquad S \leq \mu \cdot N.$$

A gyakorlatban mindig az utóbbi összefüggést használjuk. Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a felületek relatív mozgása esetén az egyenlőség jele érvényes.

1. *feladat.* Az asztal szélén levő csigán átvetett kötél két végére egy m_1 és egy m_2 tömegű testet erősítettünk (2. ábra). Az asztal és az m_2 tömegű test között a súrlódási együttható μ. Mekkora a testek gyorsulása és mekkora erő feszíti a kötelet?[3]

---

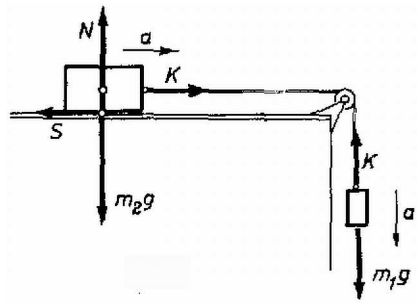
[1] Feltételezve, hogy van olyan sík, amellyel a testre ható erők párhuzamosak. Ellenkező esetben M és β vektorok, Θ tenzor.

[2] Ez azt jelenti, hogy a kölcsönhatási erő hatásvonala egy $2\alpha_{\max}$ nyílásszögű kúpfelület belsejében vagy felületén lehet, relatív elmozdulás esetén mindig a felületen van.

A μ súrlódási együttható értéke általában 0,01, 0,1 nagyságrendű, de nincsen elvi akadálya, hogy nagyobb, 1 vagy akár még nagyobb legyen.

A pontosság kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy a mozgás közben fellépő ún. csúszó súrlódási együttható kicsit kisebb, mint az a súrlódási együttható, amely az egyenlőtlenség esetén használandó. Az utóbbit tapadási súrlódási együtthatónak nevezzük. Ettől a megkülönböztetéstől az egyszerűség kedvéért cikkünkben eltekintünk.

[3] Ebben a feladatban és a többiben is az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a testek az indulás pillanatában nyugalomban vannak.



2. ábra

Megoldás. Az ábrán megrajzoltuk a testekre ható erőket, megadtuk a gyorsulásokat. (A két test gyorsulása ugyanolyan nagyságú, mert állandó hosszúságú kötéllel vannak összekötve.) A mozgásegyenletet felírjuk külön az m_1, külön az m_2 tömegű testre (az egyenleteket komponensekre írjuk föl, ez az m_1 esetében egy, az m_2 esetében két egyenletet jelent):

$$m_1a = m_1g - K,$$
$$m_2a = K - S,$$
$$0 = m_2g - N.$$

Feltételezve, hogy súrlódási együttható nem túl nagy, nem akadályozza meg a gyorsulást:

$$S = \mu \cdot N.$$

Ezt a négyismeretlenes egyenletrendszert megoldva megkapjuk a keresett mennyiségeket:

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}; \qquad K = \frac{(\mu + 1)m_1m_2g}{m_1 + m_2}.$$

Feltételezésünk nyilvánvalóan nem teljesül akkor, ha $m_1 < \mu m_2$, a gyorsulásra negatív eredményt kapnánk, ami lehetetlen. Ebben az esetben az $S = \mu N$ egyenlet helyett az $S \leq \mu N$ egyenlőtlenség kerül, az egyenletrendszer negyedik egyenlete pedig

$$a = 0,$$

mert a súrlódás megakadályozza a mozgást. Az egyenletrendszer megoldása ebben az esetben

$$a = 0; \qquad K = m_1g.$$

Összefoglalva: vagy az első három egyenlet érvényes és az $S = \mu N$ az

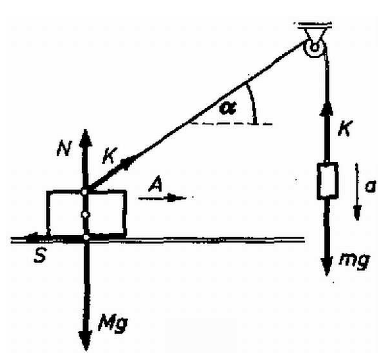
$$a \geq 0$$

feltétellel, vagy az első három és az $a = 0$ az

$$S \leq \mu N$$

feltétellel. A feladat számadataitól függ, hogy melyik egyenletrendszert kell megoldanunk. A gyakorlatban az egyik esetet tételezzük fel, megoldjuk a megfelelő egyenletrendszert és ellenőrizzük a feltételt. Ha teljesül, a megoldás helyes, ha nem, a másik esetet kell vizsgálni.

2. *feladat.* Az asztalon levő M tömegű testre kötött fonál másik végén egy m tömegű test lóg. A fonalat az ábra szerint az asztal lapja fölött levő állócsigán vetettük át, a fonál a vízszintessel α szöget zár be az asztal fölött (3. ábra). Keressük a gyorsulásokat és a kötélerőt.



3. ábra

Megoldás. A testekre ható erőket az ábrán berajzoltuk. A két test gyorsulását jelöljük A-val, ill. a-val. A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} ma =& mg - K, \\ MA =& K\cos\alpha - S, \\ 0 =& Mg - N - K\sin\alpha. \end{aligned}$$

A kényszeregyenlet:

$$a = A \cdot \cos\alpha.$$

Az ötödik egyenlet attól függ, hogy mekkora a súrlódási együttható. Ha nem túl nagy, akkor

$$S = \mu \cdot N \qquad (\text{feltétel: } a \geq 0),$$

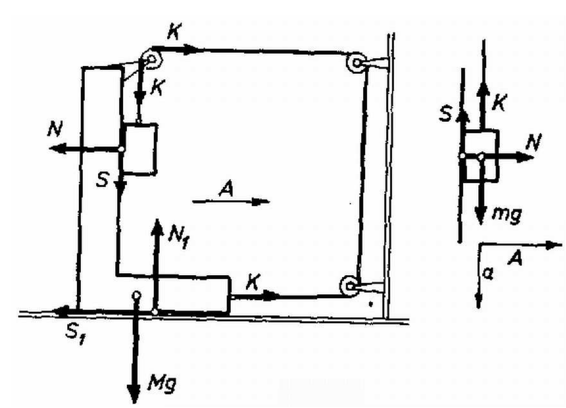
ha olyan nagy, hogy nincs gyorsulás, akkor

$$S \leq \mu N, \quad a = 0.$$

Az egyenletrendszer így teljes, megoldható.

(Az N nyomóerő itt az egyszerűbb feladatokkal ellentétben nem egyenlő Mg-vel.)

3\. *feladat.* A 4. ábra szerinti elrendezés gyorsulásait és a kötélerőt keressük. A súrlódási együttható mindkét érintkezésnél μ.



4. ábra

Megoldás. Az ábrán berajzoltuk a két testre ható valamennyi külső erőt. Mivel a két test összeér, egymásra is hatnak N és S nagyságú erővel (Newton III. törvénye), az áttekinthetőség kedvéért az m tömegű testet külön is lerajzoltuk és ide rajzoltuk a rá ható erőket. S irányát annak alapján állapítottuk meg, hogy az akadályozza a két test egymáson való elcsúszását. Az L alakú test részének tekintettük a rá erősített (egyébként súlytalan) csigát, és így a csigára ható kötélerők is a testre hatnak. Az M tömegű test gyorsulása legyen A. Az m tömegű test gyorsulása nem lesz sem függőleges, sem vízszintes, de vízszintes összetevője szintén A, a függőleges pedig legyen a. Két helyen lép fel súrlódás, de ha az egyik helyen elmozdulás jön létre, a másik helyen is csúsznak egymáson a felületek. Így ismét csak két esetet kell megkülönböztetnünk: a csúszás és a tapadás esetét. A mozgásegyenletek és a kényszeregyenlet mindkét esetben azonosak lesznek:

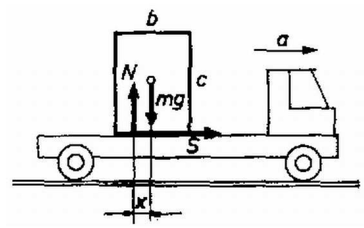
$$\begin{aligned} MA =& 2K - S_1 - N, \\ 0 =& Mg - N_1 + S + K, \\ mA =& N, \\ ma =& mg - S - K, \\ 2A =& a. \end{aligned}$$

A további feltételek pedig

csúszás esetén ($a \geq 0$):	tapadás esetén ($\alpha = 0$):
$S_1 = \mu N_1,$	$S_1 \leq \mu N_1,$
$S = \mu N.$	$S \leq \mu N.$

A hétismeretlenes egyenletrendszer a csúszás esetén megoldható, de a tapadás esetében csak hat egyenletünk van. Itt sincsen baj, mert az egyenletekből $N = 0$ következik, és az $S \leq \mu N$ egyenlőtlenségből következik, hogy $S = 0$ (S nem lehet negatív). (Ebből a feladatból látszik, hogy a súrlódási erő nem mindig egyenlő μmg-vel,

4. *feladat.* Teherautón ládát szállítanak. A teherautó rakfelületén a súrlódási együttható olyan nagy, hogy semmiképpen sem csúszhat meg a láda, de felborulhat, ha az autó nagy gyorsulással mozog. Mekkora a teherautó megengedett legnagyobb gyorsulása? A láda súlypontja a geometriai középpontban van, magassága c, alapélének hossza b (5. ábra).



5. ábra

Megoldás. A ládára a súlyerő (mg) hat, és a teherautó lapja nyomja (N nyomóerő és S súrlódási erő). Amíg a teherautó nem gyorsul, N támadáspontja az alátámasztási felület középpontja. Gyorsuláskor a támadási pont elmozdul. Ha az autó előre gyorsul, a támadási pont hátrább kerül. Ki is számíthatjuk az eltolódás x mértékét. A mozgásegyenletek (az első kettő a gyorsulásra, a harmadik a szöggyorsulásra vonatkozik, de itt $\beta = 0$):

$$ma = S, \qquad 0 = mg - N, \qquad 0 = S(c/2) - N_x.$$

Az egyenletrendszer megoldása (adott a mellett):

$$x = (c/2) \cdot (a/g).$$

Ha $a = 0$, x is nulla, és minél nagyobb a gyorsulás, annál nagyobb x. x azonban nem lehet nagyobb, mint $b/2$, vagyis

$$a_{\max} = g \cdot (b/c).$$

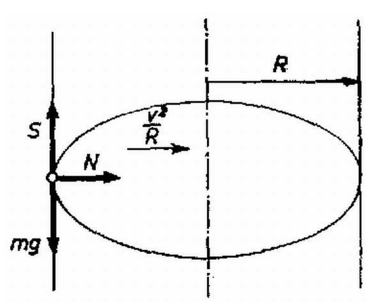
Azt is meg tudjuk mondani, hogy legalább mekkora a súrlódási együttható.

Az $S \leq \mu N$ egyenlőtlenségből:

$$\mu_{\min} = \frac{S}{N} = \frac{a_{\max}}{g} = \frac{b}{c}.$$

A súrlódási erő irányáról sokan azt mondják, hogy a mozgással ellentétes irányba mutat. Éppen ebből a feladatból látszik, hogy ez a kijelentés helytelen, itt éppen a súrlódási erő gyorsítja a ládát, súrlódás hiányában a láda helyben maradna, „lecsúszna” az induló autóról. A súrlódási erő mindig olyan irányú, hogy meg akarja akadályozni a súrlódó felületek egymáshoz viszonyított elmozdulását, például itt a ládának az autóról való lecsúszását. Ha a felületek egymáson elcsúsznak, a súrlódási erő iránya egyértelmű, de ha összetapadnak, akkor az erő irányát az határozza meg, hogy a felületek hogyan mozdulnának el egymáshoz képest súrlódás hiányában. Ezt illusztrálja a következő feladat.

5. *feladat.* Cirkuszi mutatvány: függőleges tengelyű, R sugarú körhenger belsejében vízszintes körpályán állandó v sebességgel motoros halad. Mit mondhatunk a μ súrlódási együtthatóról?



6. ábra

Megoldás. A 6. ábrán egy ponttal jelöltük a motorkerékpárt és utasát. A testre ható erők: a súlyerő, a felületre merőleges nyomóerő és a súrlódási erő. A súrlódás akadályozza meg, hogy a motoros lecsússzék, a súrlódási erő ezért függőlegesen felfelé mutat. (Az érintkező felületek, a fal és a gumiabroncs csúszás nélkül érintkeznek.) A test egyenletes körmozgást végez, gyorsulása v^2/R nagyságú, a kör középpontja felé mutat. A mozgásegyenlet a vízszintes és függőleges komponensekre:

$$mv^2/R = N, \qquad 0 = mg - S.$$

Az egyenletrendszer két ismeretlent tartalmaz, megoldható. Az

$$S \leq \mu N$$

összefüggésből kapjuk, hogy a súrlódási együttható legalább

$$\mu_{\min} = S/N = gR/v^2$$

értékű. Ha ennél kisebb lenne, a motoros lecsúszna.