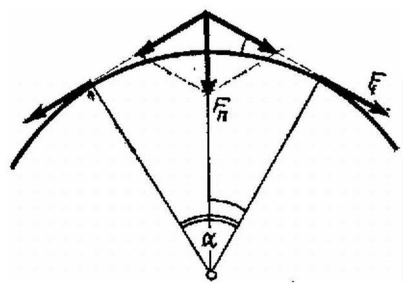
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 23-án rendezte ez évi fizikai versenyét. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. *r rádiuszú kerék kerületére vékony gumikarikát feszítünk, amelynek tömege m, eredeti hossza L és hosszegységgel való megnyújtásához D erő szükséges. A súrlódási együttható a kerék kerülete és a gumikarika között μ. A kereket nyugalomból kiindulva β állandó szöggyorsulással forgatjuk. Mekkora szögsebességnél csúszik meg a karika? Mekkora szögsebességnél esik le?*

Megoldás. Ha a kerékre ráfeszítjük a gumikarikát, akkor hosszát megnöveltük $(2\pi r - L)$ darabbal, aminek következtében a gumiszalagban $(2\pi r - L)D$ rugalmas erő támad. Ez a rugalmas erő mindenütt az érintő mentén működik. Ki kell számítani, hogy F_t érintő mentén működő erő mekkora középpont felé irányuló, az érintőre merőleges F_n erőt hoz létre a kerület minden pontjában (1. ábra).



1. ábra

Ha a körív α középponti szöghöz tartozó darabját nézzük, akkor $F_n = 2F_t \sin(\alpha/2)$. Kis α szög esetében, a szöget mindig radiánban számítva $F_n = \alpha F_t$.

Az előbb számított $(2\pi r - L)D$ rugalmas erőtől származó merőleges erő $(2\pi r - L)D\alpha$. A gumikarika α szöghöz tartozó darabját a kerülethez odaszorító erőt megkapjuk, ha kivonjuk belőle a centrifugális erőt. Az α középponti szöghöz tartozó karikarész tömege $\alpha m/(2\pi)$. Ezt szorozva $\omega^2 r$-rel kapjuk a centrifugális erőt: $\alpha m\omega^2 r/(2\pi)$. Végeredményben a vizsgált tömegrészt merőlegesen a kerékhez odaszorító erő:

(1)
$$(2\pi r - L)D\alpha - \frac{m\omega^2 r}{2\pi}\cdot\alpha.$$

Ahhoz, hogy a gumikarika a kerék kerületével együtt $\alpha = \beta r$ gyorsulással gyorsuljon, $\alpha m\beta r/2\pi$ gyorsító erő szükséges az érintő irányában. A merőlegesen odaszorító erőből származó lehetséges legnagyobb súrlódási erőt megkapjuk, ha az (1) alatti erőt μ-vel szorozzuk. Mivel a súrlódás adja át a kerékről a karikának a gyorsító erőt, azért azt az ω_1 szögsebességet, amely felett a karika megcsúszik, úgy kapjuk meg, hogy a maximálisan lehetséges súrlódási erőt egyenlővé tesszük a gyorsításhoz szükséges erővel:

$$\mu\left[(2\pi r - L)D\alpha - \frac{m\omega_1^2 r}{2\pi}\cdot\alpha\right] = \frac{m\beta r\alpha}{2\pi}.$$

Innen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\pi(2\pi r - L)D}{mr} - \frac{\beta}{\mu}}.$$

Ezzel válaszoltunk az első kérdésre. Az ún. leesés feltétele, hogy az (1) alatti odaszorító erő eltűnjön. Ebből az egyenletből az ehhez szükséges ω_2:

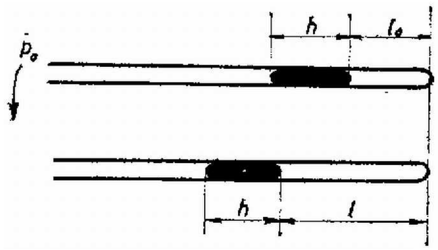
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\pi(2\pi r - L)D}{mr}}.$$

Miközben a kerék szögsebessége állandó szöggyorsulással tovább növekszik, ω_1 elérése után a gumikarika szögsebessége már kisebb, mint a keréké, és ω_2 a gumikarika szöggyorsulásának felső határát jelenti, amelyet csak aszimptotikusan közelít meg.

Az adatok számértékei a versenyfeladatban a következők voltak: $r = 10$ cm $= 0{,}1$ m; $m = 1{,}256$ kg; $L = 0{,}608$ m; $D = 0{,}05$ kp/cm $= 50$ newton/m; $\mu = 0{,}02$; $\beta = 2\ \mathrm{s}^{-2}$. Ezekkel az adatokkal a gumikarika már az indulás pillanatában megcsúszik, mert a rugalmas erő a centrifugális erő beszámítása nélkül sem tud akkora súrlódási erőt létrehozni, amely a kerékkel egyező gyorsulással gyorsítaná a karikát. A karika szögsebességének felső határértéke $\omega_2 = 7{,}07\ \mathrm{s}^{-1}$. Amennyiben a karika tömege 0,1256 kg, a megcsúszás szögsebessége $\omega_1 = 20\ \mathrm{s}^{-1}$ és $\omega_2 = 22{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$.

2. $L = 1$ méter *hosszú, egyik végén beforrasztott vékony üvegcsőben* 1 atmoszféra *nyomás mellett* $h = 20$ cm *hosszú higanyoszlop zár el* $l_0 = 20$ cm *hosszú légoszlopot: A csövet zárt vége körül* $\omega = 6\ \mathrm{s}^{-1}$ *szögsebességgel forgatjuk vízszintes síkban. Milyen hosszú most az elzárt légoszlop?*

Megoldás. Adott szögsebességgel történő forgás közben a légoszlop hossza l (2. ábra).



2. ábra

A külső légnyomás p_0. Forgás közben a légoszlop belsejében a nyomás Boyle–Mariotte törvénye szerint $p = p_0 l_0/l$. Számítani kell a higanyra ható centrifugális erőt. Felhasználva a higany ϱ sűrűségét, az egységnyi alapterületű higanyoszlop tömege $h\varrho$. Tekintettel arra, hogy $m\omega^2 r$ centrifugális erő a középponttól mért távolsággal egyenes arányban növekszik, a higanytömegre ható centrifugális erőt úgy számíthatjuk, mintha a higany a forgástengelytől $l + h/2$ távolságban volna, és így a centrifugális erőből származó, kifelé vivő nyomás $h\varrho\omega^2(l + h/2)$. A higanyt kifelé vivő nyomások összege egyensúly esetében egyenlő p_0 külső nyomással:

(2) $$p_0 = \frac{p_0 l_0}{l} + h\varrho\omega^2\left(l + \frac{h}{2}\right).$$

l ismeretlenre rendezve:

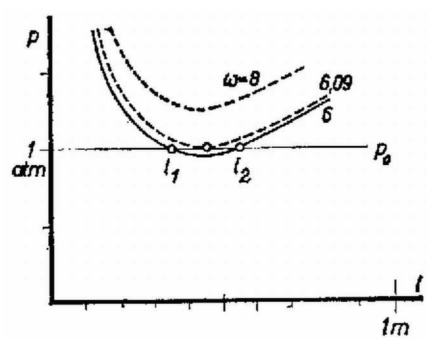
$$l^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{p_0}{h\varrho\omega^2}\right) l + \frac{p_0 l_0}{h\varrho\omega^2} = 0.$$

Ennek megoldása:

$$l = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{p_0}{h\varrho\omega^2} - \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0}{h\varrho\omega^2} - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{4p_0 l_0}{h\varrho\omega^2}}\right].$$

Feladatunk számadatait célszerűen ilyen alakban használjuk: $p_0 = 10$ newton/cm^2 $= 10^5$ newton/m^2; $l_0 = 0{,}2$ m; $h = 0{,}2$ m; $\varrho = 13{,}6$ gramm/cm^3 $= 1{,}36 \cdot 10^4$ kg/m^3; $\omega = 6$ s^{-1}. Így $p_0/h\varrho\omega^2 = 1{,}021$ méter, és az egyenlet két megoldása: $l_1 = 37{,}2$ cm, $l_2 = 54{,}9$ cm. Mindegyik esetben a higany az 1 méter hosszú esőben marad.

Meg kell vizsgálnunk a feladat eredményeként adódó két egyensúlyi helyzet minőségét. Grafikusan ábrázoljuk a légoszlop l hosszának függvényében a higanyt kifelé vivő nyomást, amelyet (2) jobb oldala ad meg (3. ábra).



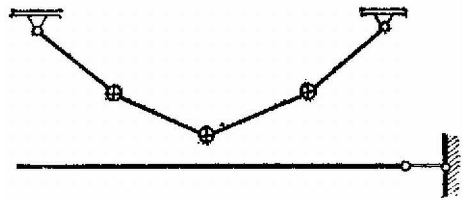
3. ábra

Minimumot végigfutó görbét kapunk. Ennek a $p_0 = 1$ atmoszféra magasságban húzott egyenessel alkotott metszéspontjai mutatják a feladat l_1 és l_2 megoldásait. Azonnal kiderül, hogy ha a higany kifelé csúszna, akkor ezzel l_1-nél a befelé vivő, l_2-nél a kifelé vivő nyomás válna nagyobbá. Tehát l_1 stabilis, l_2 labilis egyensúlyi helyzetet jelent. A higany befelé való elmozdulásából is ugyanez következik.

Amennyiben ω szögsebesség nagyobb, a kifelé vivő nyomást ábrázoló görbe feljebb tolódik. $\omega = 6{,}09$ s^{-1} szögsebességnél a megoldás képletében a diszkrimináns nulla lesz, a görbe érinti az 1 atmoszféra magasságában húzódó egyenest, és egyetlen egyensúlyi helyzet adódik, amely labilis. Még nagyobb szögsebességnél semmiféle egyensúlyi helyzet sem lehetséges.

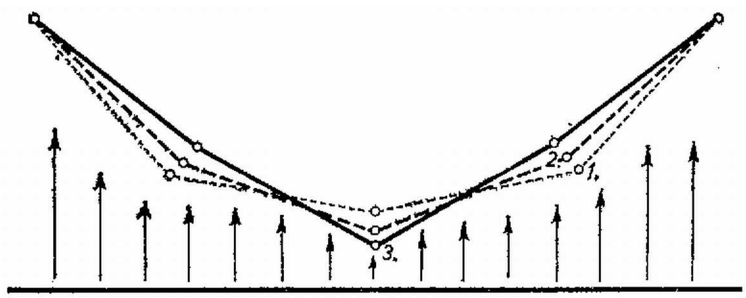
3. *Nagy kiterjedésű, sík, földelt fémlap fölött a 4. ábrán látható módon elhanyagolható súlyú, szigetelő fonálon rögzítve egyenlő tömegű, szigetelő anyagból készült kis golyók függenek. A golyók mindegyikének ugyanakkora, egyenletesen elosztott pozitív elektromos töltése van. Megváltozik-e a golyósor alakja, ha a fémlapra pozitív elektromos feszültséget kapcsolunk?*

(Károlyházi Frigyes)



4. ábra

Megoldás. Először is azt kell belátnunk, hogy már a földelt fémlap esetében sem olyan a golyósor alakja, mint amikor a fémlap nincs ott. Tegyük fel, hogy először csak a golyósor van jelen, a potenciálok vonatkoztatási pontja, a Föld valahol nagyon messze van. A golyósor alakját az 5. ábrán az 1. számú pontozott vonal tünteti fel. Amennyiben a golyók súlya egyenlő, mindig ez az alak jön létre.



5. ábra

Ezután helyezzük el az igen nagy kiterjedésű fémlapot. A megosztás folytán a lapban mutatkozó negatív töltések lefelé húzzák a golyókat, de a középső golyót erősebben, mert közelebb van a lemezhez. (A vonzóerők egyébként úgy számíthatók, mintha a megosztott töltések az eredetieknek a tükörképei volnának.) Mivel a megosztott töltések a középső golyót nagyobb erővel vonzzák, mint a szélsőket, a golyósor középen kihegyesedik, a középső golyó lejjebb húzódik (2. számú, szaggatott vonal). Ne felejtsük el, ez a kihegyesedés annál nagyobb mértékű, minél könnyebbek a golyók. Ebben az állapotban kezdődik a feladat szövege.

Ha a fémlapot pozitív feszültségre kapcsoljuk, akkor környezetében homogén elektromos tér jön létre. Ha a lap elég nagy kiterjedésű, akkor ez a tér gyakorlatilag homogén, és így mindegyik golyót ugyanakkora erővel taszítja. Ez a taszítás olyan, mintha a golyók könnyebbekké váltak volna. De előbbi meggondolások szerint a középen nagyobb, a széleken kisebb elektromos erő, amelyet a most is működő megosztás jelent, könnyebb golyóknál nagyobb hegyesedést okoz. Így pozitív feszültség esetében a pozitív töltésű középső golyó lejjebb húzódik a 3. számú folytonos vonal szerint.

A verseny eredménye: I. díjat nyert *Nagy András* honvéd (a budapesti Fazekas Gimnáziumban Hutay Ferenc volt tanítványa). A **II.** díj nem került kiosztásra. **III.** díjat nyert *Szabó Zoltán,* a budapesti Apáczai Csere Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Turtóczky Sándor). Dicséretet kaptak és könyvjutalomban részesültek *Balog János,* a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Moór Ágnes), *Horváth László,* a hódmezővásárhelyi Bethlen Gábor Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Horváth István és Bodrogi Sándor), *Kövér András,* a debreceni Kossuth Lajos imnázium IV. osztályos tanulója (tanára Czirjék Lászlóné), *Monostori László,* a budapesti Műszaki Egyetem villamosmérnök hallgatója (a budapesti Fazekas Gimnáziumban Hutay Ferenc volt tanítványa), és *Vassel Róbert,* a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Moór Ágnes).