**I. megoldás.** Felhasználjuk, hogy a háromszög területe kifejezhető az oldalakkal és a körülírt kör $r$ sugarával:

$$t = \frac{am_a}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ab}{4} \cdot \frac{2r\sin\gamma}{r} = \frac{abc}{4r}. \tag{2}$$

(Az oldalak a háromszöggel együtt természetesen $r$-et is meghatározzák.) Felhasználjuk továbbá, hogy az $x^3$ függvény szigorúan monoton növekvő, mert nincs olyan intervallum, melyben a deriváltja negatív vagy 0 volna. Ezek alapján az (1) állítást így alakítjuk:

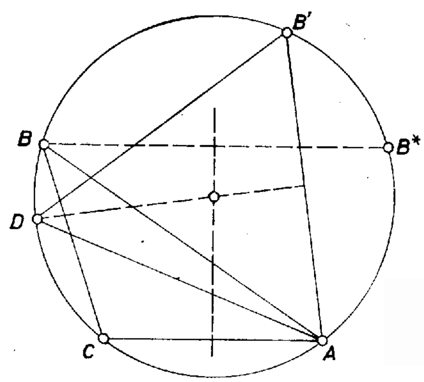
$$64t^3 = 4t\left(\frac{abc}{r}\right)^2 \le 3\sqrt{3}a^2b^2c^2, \qquad t \le \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}r\right)\cdot\frac{3r}{2}.$$

Az utolsó alakban felismerjük, hogy a $(\sqrt{3}r)$ tényező a háromszögünk köré írt $k$ körbe írható szabályos háromszög oldala, $3r/2$ pedig annak magassága, tehát a jobb oldal a mondott szabályos háromszög $T$ területét jelenti. Ennélfogva azt kell bizonyítanunk, hogy

$$t \le T. \tag{3}$$

Válasszuk úgy $ABC$ háromszögünk szokásos betűzését, hogy legyen $a \le b \le c$. Ha itt mindkét összehasonlításban egyenlőség áll, akkor $ABC$ szabályos háromszög, és (3)-ban egyenlőség áll. Az ellentétes esetben $a < c$, és a megfelelő szögekre $BAC\sphericalangle < 60° < ACB\sphericalangle$. Belátjuk, hogy ekkor (3) az egyenlőtlenség jelével érvényes.

Jelöljük a $B$ csúcsnak az $AC$ oldal felező merőlegesére vonatkozó tükörképét $B^*$-gal és $k$ középpontját $O$-val (1. ábra).




*1. ábra*

Ekkor

$$\begin{aligned} AOB^*\sphericalangle &= COB\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle < 120°, \text{ és} \\ AOB\sphericalangle &= 2ACB\sphericalangle > 120° \end{aligned}$$

(az utóbbi esetben $AOB\sphericalangle$ $k$-nak a $C$-t nem tartalmazó $AB$ ívéhez tartozó középponti szögét jelöli). Ha tehát az $OA$ sugarat az $ABC$ háromszög körüljárásával megegyező irányban $O$ körül $120°$-kal elforgatjuk, közben átlépjük az $OB^*$ sugarat, de nem érjük el az $OB$ sugarat. Jelöljük a $120°$-os forgatás után a sugár új végpontját $B'$-vel, ekkor előbbi megállapításunk szerint $B'$ a $C$-t nem tartalmazó $B^*B$ íven van, tehát távolabb van az $AC$ egyenestől, mint $B$. Eszerint az $AB'C$ háromszög $t_1$ területe nagyobb $t$-nél.

A $k$ kör $AB'$-től legtávolabbi pontja az $AB'$-re merőleges átmérőnek $AB'$-től távolabbi $D$ végpontja, tehát $t_1$ nem lehet nagyobb az $AB'D$ háromszög területénél. Mivel pedig az $AB'$ ívhez tartozó középponti szög $120°$-os, azért az $AB'D$ háromszög szabályos, és a területe $T$. Ezzel beláttuk, hogy $T \ge t_1 > t$, ezt akartuk bizonyítani.

*Megjegyzés.* A fenti bizonyítás nem különbözik lényegesen attól, ami a (3) híres-nevezetes állításra pl. a következő helyen olvasható: *H. Rademacher-O. Toeplitz:* Számokról és alakzatokról. 2. kiadás. Középiskolai Szakköri Füzetek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954. 14–16. oldal.

**II. megoldás.** Az állítást ismét átalakítjuk. (2) alapján a fentiekhez hasonlóan

$$\frac{abc}{r} \le \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}, \qquad \text{azaz} \quad \sqrt[3]{abc} \le \sqrt{3}r.$$

Ehhez elég belátni, hogy (poz. számok számtani és mértani közepe):

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{3}r, \tag{4}$$

vagyis azt, hogy az $r$ sugarú körbe írt háromszög kerülete legföljebb $3\sqrt{3}r$, ami a fentiek szerint a beírt szabályos háromszög kerülete.

Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint az I. megoldásban (3)-at. Az ott használt jelölések mellett elég azt belátnunk, hogy

$$AB' + B'C > AB + BC,$$

azaz hogy

$$2r\sin 60^\circ + 2r\sin(\alpha+\gamma-60^\circ) > 2r\sin\alpha + 2r\sin\gamma.$$

Ez a $\sin u + \sin v = 2\sin\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2}$ azonosság szerint ekvivalens a következőkkel:

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-120^\circ}{2} > \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2},$$
$$\frac{\alpha+\gamma}{2} - 60^\circ < \frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Ez pedig valóban igaz, mert jobb oldala így alakítható:

$$\frac{\gamma-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} - \alpha,$$

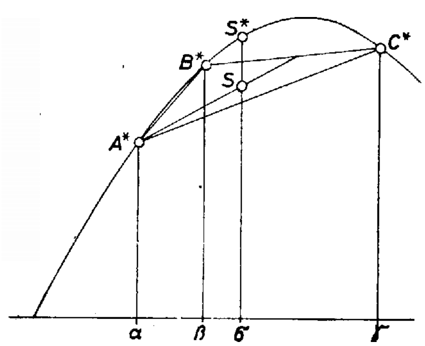
és $\alpha < 60^\circ$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy az $AB'D$ háromszög kerülete legalább akkora, mint az $AB'C$ kerülete.

*Megjegyzések.* 1. A (4) állítás ekvivalens a háromszögünk szögeire vonatkozó

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenlőtlenséggel. Erre adunk szemléletes értelmezést: $\sin\alpha, \sin\beta$ és $\sin\gamma$ a $\sin x$ függvényt ábrázoló görbe $\alpha$, $\beta$, ill. $\gamma$ abszcisszájú $A^*$, $B^*$, $C^*$ pontjának ordinátája. Az abszcisszák pozitívok és összegük $\pi$. Így (4) bal oldala az $A^*B^*C^*$ háromszög $S$ súlypontjának ordinátája, $S$ abszcisszája hasonlóan $\sigma = \pi/3$, és a görbe $\sigma$ abszcisszájú $S^*$ pontjának ordinátája $\sqrt{3}/2$, a (4) jobb oldalán álló szám. Eszerint (4) más szóval azt állítja, hogy $S$ alatta van a $\sin x$ függvényt ábrázoló görbének, vagy éppen rajta van. (Ha $\alpha, \beta, \gamma$ közül kettő vagy mind a három egyenlő, akkor a mondott háromszög elfajul, ekkor szemléletesebb az $A^*$, $B^*$, $C^*$ tömegpontrendszer súlypontjára gondolni, mindhárom pontba egyenlő tömeget téve; $A^* \equiv B^*$ esetén $S$ az $A^*C^*$ szakaszon van.)

Ha $\alpha < \beta < \gamma$, akkor $S$ benne van az $A^*B^*C^*$ háromszögben, ezért elég azt belátni, hogy a görbe $(0, \pi)$ intervallumbeli ívének két pontját összekötő húr a görbe alatt halad (2. ábra, jobb áttekintés érdekében torzítással), a szokásos kifejezéssel: a $\sin x$ görbe – és a függvény is – ebben az intervallumban konkáv (ti. alulról, a pozitív $y$ tengely irányába nézve).[1]




*2. ábra*

Ezt bizonyítjuk a $0 < \alpha < \beta < \gamma$ nagyságviszony esetében az $A^*C^*$ húrra.

Állításunk azt jelenti, hogy a közbülső $B^*$ pontra az $A^*B^*$ egyenes emelkedése nagyobb, mint a $B^*C^*$ egyenesé:

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha - \beta} > \frac{\sin\gamma - \sin\beta}{\gamma - \beta}. \tag{5}$$

Ennek bizonyítására megmutatjuk, hogy

$$\frac{\sin x - \sin\beta}{x - \beta}\begin{cases} < \cos\beta, \text{ ha } \pi > x > \beta & \text{(I.)} \\ > \cos\beta, \text{ ha } 0 < x < \beta & \text{(II.)}\end{cases} \tag{6}$$

[1] Vö. a függvény konkávságának pusztán számviszonyokkal kifejezett definíciójával a P. 110. problémában. K. M. L. 43 (1971) 30. oldal.

ebből $\alpha < \beta < \gamma$ figyelembevételével már adódik, hogy $\cos\beta$ értéke (5) bal oldalánál kisebb, jobb oldalánál nagyobb, tehát (5) igaz.

Deriváljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \sin x - \sin\beta - (x - \beta)\cos\beta.$$
$$f'(x) = \cos x - \cos\beta.$$

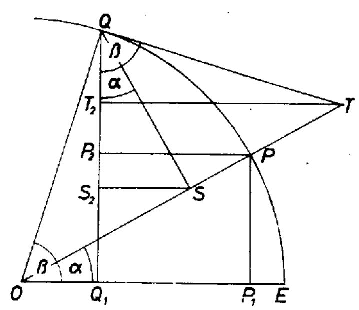
Eszerint az (I.) intervallumban minden pontjában $f'(x) < 0$, a (II.) pontjaiban $f'(x) > 0$, és mivel $f(\beta) = 0$, azért (I.) és (II.) mindegyikében $f(x) < 0$. Ebből átrendezéssel és az osztásban $x - \beta$ előjelét figyelembe véve adódik (6).

Mivel $\cos\beta$ a $\sin x$ görbe $B^*$-beli érintőjének iránytangense, azért az (5)-re adott bizonyításunk azt jelenti, hogy az érintő mind $x > \beta$, mind $x < \beta$ esetén közte halad a $B^*C^*$ és $A^*B^*$ egyeneseknek.

2. Goniometriai bizonyítását adjuk a (6) pótlására alkalmas

$$\cos\alpha > \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} > \cos\beta \qquad \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

egyenlőtlenségnek. Mérjük föl az $O$ középpontú, egységsugarú kör $OE$ sugarától pozitív irányban az $EOP = \alpha$ és $EOQ = \beta$ szögeket (3. ábra), húzzuk meg a kör $Q$-beli érintőjét az $OP$-vel való $T$ metszéspontjáig, bocsássunk merőlegest $P$-ből és $Q$-ból $OE$-re – talppontjuk $P_1$, ill. $Q_1$ –, továbbá $Q$-ból $OP$-re talppontja $S$ –, végül $S$-ből, $P$-ből és $T$-ből $QQ_1$-re – a talppontok rendre $S_2, P_2, T_2$.




*3. ábra*

Így $Q_1QS\sphericalangle = \alpha$, $Q_1QT\sphericalangle = \beta$, a pozitív hegyesszögekre ismert $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ egyenlőtlenséget a $QOP = \beta - \alpha$ szögre alkalmazva

$$QS < \widehat{QP} < QT,$$

továbbá $OS < OP < OT$, ennélfogva $Q_1S_2 < Q_1P_2 < Q_1T_2$, tehát

$$QT_2 < QP_2 < QS_2.$$

Ezek fölhasználásával

$$\underset{\sim\sim\sim}{\cos\beta} = \frac{QT_2}{QT} < \frac{QP_2}{QT} < \frac{QP_2}{\widehat{QP}} = \frac{QQ_1 - PP_1}{\beta - \alpha} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha}} < \frac{QS_2}{\widehat{QP}} = \frac{QS_2}{QS} < \underset{\sim\sim\sim}{\cos\alpha}$$

és a hullámosan aláhúzott tagok éppen a fenti állításunkat adják.

Könnyű belátni, hogy bizonyításunk mindaddig érvényes, amíg $\alpha < \beta < \alpha + 90°$, eszerint fenti állításunkat ($\alpha, \beta$ helyére rendre $\beta$-t, $\gamma$-t írva) csak olyan háromszögekre bizonyítja, amelyekre $\gamma - \beta < 90°$. Másrészt elég a konvexséget a $(0, \pi/2)$ intervallumra bizonyítani, hiszen $\sin x$ képe a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban amannak a tükörképe az $x = \pi/2$ egyenesre.