A kettős egyenlőtlenség közepén álló Q_n hányados írható n számú, $\dfrac{2k-1}{2k}$ alakú hányados szorzataként, ahol $k=1,2,\ldots,n$.

1. Írjunk Q_n k-adik tényezője helyére $\dfrac{2k-2}{2k-1}$-et, ha $k=2,3,\ldots,n$ – vagyis csökkentsük 1-gyel a számlálókat is, nevezőket is – az első tényezőt pedig hagyjuk változatlanul. Ezáltal $n>1$ esetére Q_n-nél kisebb számot képezünk, mert egyrészt minden egyes új tényező kisebb annál, aminek a helyére írtuk:

$$\frac{2k-2}{2k-1}-\frac{2k-1}{2k}=\frac{1}{(2k-1)2k}<0 \qquad (k\geqq 2),$$

másrészt még az új hányadosok is pozitívok, így szorzatuk is pozitív. Eszerint

$$Q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\right).$$

Vegyük észre, hogy így a zárójelben $1/Q_n$-nek $1/2n$ része áll, azt kaptuk tehát, hogy

$$Q_n>\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{Q_n},\quad \text{azaz}\quad Q_n>\frac{1}{\sqrt{4n}},\quad \text{ha}\quad n>1$$

és itt a jobb oldal éppen az (1)-beli alsó korlát egyszerűbb alakja. A még nem tekintett $n=1$ esetben pedig Q_n és a bizonyítandó alsó korlát között egyenlőség áll fenn. Ezzel (1) első egyenlőtlenségét bebizonyítottuk.

2. Írjunk másrészt Q_n fenti szorzattá alakításában minden egyes tényező helyére nála nagyobbat, kivéve ismét az első tényezőt. Éspedig

$$\frac{2k-1}{2k}\ \text{helyére}\ \frac{2k}{2k+1}\text{-et (valóban, }\frac{2k}{2k+1}-\frac{2k-1}{2k}=\frac{1}{2k(2k+1)}>0),$$

ha $k=2,3,\ldots,n-1$, ha pedig $k=n$, akkor $\dfrac{2n}{2n}$-t (vagyis $a=2$ esetén csak az utóbbi típusú növelést végezzük). Ezek után a fentihez hasonló felismeréssel

$$Q_n<\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{Q_n}\cdot\frac{1}{2n}\right)$$

(a zárójelbeli kifejezést megszoroztuk $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}$-dal). Innen, ismét átszorzással és gyökvonással

$$Q_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}},\quad \text{ha}\quad n>1,$$

ami az (1) második egyenlőtlensége. $n=1$ esetére pedig az állítás így adódik: $1/2=\sqrt{2/8}<\sqrt{3/8}$. Ezze1 a kívánt bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Bizonyítható az állítás a teljes indukció módszerével is, ha előzőleg a felső korlátban $2n$ helyére $2n+1$-et írunk, ami által az egyenlőtlenség–pár második fele valamivel erősebb állítást mond ki.

2. Emeljük négyzetre az (1) állítás tagjait, és szorozzuk őket $2n$-nel, így ezt kell bizonyítanunk:

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n-2)^2\cdot 2n}<\frac{3}{4}. \tag{2}$$

A középen álló

$$A_n=2nQ_n^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\cdot 2n}$$

mint egy számsorozat n-edik tagja n-ben monoton nő, hiszen

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}>1,$$

és a (2) bal oldala e sorozat első tagja: $A_1=1/2$. A jobb oldalon álló $3/4$ szám viszont a monoton fogyó

$$B_n=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

sorozat első tagja, és ennek a sorozatnak minden tagja nagyobb az A_n sorozat tagjainál. Könnyen igazolható ez az egyenlő indexű tagokra:

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{2n+1}{2n} > 1. \tag{3}$$

Szokás az

$$A_n < A_{n+1} < B_{n+1} < B_n \tag{4}$$

egyenlőtlenség alapján azt mondani, hogy az (A_n, B_n) intervallumok „egymásba skatulyázva”. Be lehet bizonyítani, hogy ha az A_n, B_n (végtelen) sorozatokra teljesül (4), akkor e sorozatok konvergensek, és ha még

$$\lim_{n\to\infty} (B_n - A_n) = 0, \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n} = 1$$

is teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Esetünkben ez a közös határérték $\frac{2}{\pi} = 0{,}63661\ldots$, amit az (A_n, B_n) számpárok egyre jobban megközelítenek:

$$A_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5; \qquad A_2 = \frac{9}{16} = 0{,}56\ldots; \qquad A_3 = \frac{225}{384} = 0{,}585\ldots; \ \ldots$$

$$B_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75; \qquad B_2 = \frac{45}{64} = 0{,}71\ldots; \qquad B_3 = \frac{1575}{2304} = 0{,}683\ldots; \ \ldots$$

és

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{A_2}{B_1} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{B_2}{A_2} = \frac{5}{4}, \qquad \frac{A_3}{B_2} = \frac{5}{6}, \qquad \frac{B_3}{A_3} = \frac{7}{6}, \ \ldots$$

E sorozatok (vagy a reciprokaik) alapján π értéke tetszőleges pontossággal meghatározható. Erre a célra *J. Wallis* használta először ezeket a sorozatokat 1656-ban.