$x=0$ egész szám, és $P(0)=a_0$; a feltevés szerint viszont az oszthatósági kapcsolat ismert jelölésével:[1]

$$(2)\qquad 7|P(0), \quad \text{tehát} \quad 7|a_0,$$

ami az állításnak az utolsó együtthatóra vonatkozó része.

A továbbiakban ismételten felhasználjuk a következő két segédtételt:

I. Ha $7|b$ és $7|c$, akkor

$$7|(b+c) \quad \text{és} \quad 7|(b-c).$$

Valóban,

$$\frac{b\pm c}{7}=\frac{b}{7}\pm\frac{c}{7},$$

a jobb oldal mindkét tagja feltevésünk szerint egész szám, másrészt pedig két egész szám összege is, különbsége is egész szám. Eredményünket ebben az alakban is fogjuk alkalmazni: ha $7|(b+c)$ és $7|b$, akkor $7|c$ (vagyis az első feltételből a 7-tel osztható b elhagyható).

II. Ha egy szorzat osztható egy olyan c (egész) számmal, amely a szorzat egyik tényezőjéhez relatív prím, akkor a szorzat másik tényezője osztható c-vel.[2]

Mármost, ha x egész szám, akkor $(-x)$ is egész, így $7|P(x)$, $7|P(-x)$, és az I. segédtétel alapján következik, hogy:

$$(3)\qquad 7\big|\big\{P(x)-P(-x)\big\}=2x(a_5x^4+a_3x^2+a_1),$$

ugyanis a különbségből az x páros kitevőjű hatványait tartalmazó tagok kiesnek, a_0 is. Innen $x=1$, 2 és 4 helyettesítéssel és mindjárt figyelembe véve, hogy $2x=2$, 4 és 8 mindegyike relatív prím 7-hez, a II. segédtétel alapján:

$7\|2(a_5+a_3+a_1)$,	tehát	(4)	$7\|(a_5+a_3+a_1)$,
$7\|4(16a_5+4a_3+a_1)$,	tehát	(5)	$7\|(16a_5+4a_3+a_1)$,
$7\|8(256a_5+16a_3+a_1)$,	tehát		$7\|(256a_3+16a_3+a_1)$.

A jobb oldali három kapcsolatból **I.** alapján összeadással, majd **II.** alapján, végül **I.** alapján kivonással

$7|(273a_5+21a_3+3a_1)=3\big\{7(13a_5+a_3)+a_1\big\}$,

$7\big|\big\{7(13a_5+a_3)+a_1\big\}$, mert 3 és 7 relatív prímek, tehát

$$(6)\qquad 7|a_1.$$

Ennek alapján (4) és (5) így alakul:

$$(4')\qquad 7|(a_5+a_3), \qquad 7|(16a_5+4a_3),$$

és tovább a fentiekhez hasonlóan

$$7\big|\big\{(16a_5+4a_3)-(a_5+a_3)-(a_5+a_3)\big\}=7(2a_5)+2a_3,$$
$$7|2a_3,$$

$$(7)\qquad 7|a_3,$$

végül ezt $(4')$-vel együtt figyelembe véve

$$(8)\qquad 7|a_5.$$

A (6), (7), (8) és (2) eredmények az állítás bizonyítását jelentik $P(x)-P(-x)$ különbségben fellépő együtthatókra és a_0-ra.

Ezzel pedig a hátralevő együtthatókra is megadtuk a bizonyítást, hiszen a föltevés és (2) alapján

$$7\big|\big\{P(x)+P(-x)-2P(0)\big\}=2x^2(a_6x^4+a_4x^2+a_2),$$

ugyanis az összegben x páratlan kitevős hatványai kiestek, és ismét az $x=1$, 2 és 4 értékeket véve az utóbbi alakból a $2x^2$ tényező II. alapján elmarad, ez után pedig a maradó több tagú lényegében azonos a (3)-beli többtagúval.

Megjegyzések. 1. Az $a_6=a_5=a_4=a_3=a_0=0$, $a_2=a_1=7/2$ együttható–rendszer példát ad olyan polinomra, amelynek értéke minden egész x mellett 7-tel osztható egész szám, együtthatói viszont nem mind egész számok, ennélfogva rá az eredeti kitűzés állítása nem igaz.

2. Hetedfokú egyenletre már nem volna igaz a helyesbített feladat állítása. Ugyanis az x^7-x polinom együtthatói egész számok, a polinom értéke minden egész x helyen osztható 7-tel, viszont nem minden együtthatója osztható 7-tel (csak a ki nem írt, 0 értékű együtthatói).

[1] Lásd *Horvay Katalin–Pálmay Lóránt:* Matematika a gimn. I. oszt. számára. 4. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1969. 110.old.

[2] A bizonyítás megtalálható pl. a következő középiskolai szakköri füzetben, a 18–26. oldalakon: *Faragó László:* A számelmélet elemei. 2. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest. 1967.