I. forduló, kezdők (legföljebb I. osztályosok) részére

1. Egy függőleges táblára három fogaskereket szerelünk, mindegyiknek egy-egy foga pirosra van festve. Tengelyeik egy vízszintes egyenes mentén helyezkednek el. Rendre 15, 27, 21 foguk van. A középső fogaskerék kapcsolódik mindkét másikhoz. A kiindulási helyzetben mindegyik fogaskerék piros foga vízszintes helyzetű és jobbra mutat. Hányszor kell a 15 fogú kereket az óramutató járásával egyező irányban megforgatnunk, hogy újra a kiindulási helyzetbe jussunk?

2. Egy négyszögről András azt állítja, hogy négyzet; Balázs azt, hogy paralelogramma; Csilla azt, hogy trapéz; Dóra pedig azt, hogy deltoid. A tanár megállapítja, hogy az elhangzott négy állítás közül három igaz, egy nem. Mit mondhatunk a négyszögről?

3. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 30°$. Rajzoljunk az AC befogó fölé kifelé négyzetet, középpontja legyen O_1, a BC befogó fölé kifelé szabályos háromszöget O_2 középponttal. Mekkora szöget zár be az AO_1 és AC felezőpontjain átmenő egyenes a BO_2 és BC felezőpontjain átmenő egyenessel?

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2^{3x+7y} = 256,$$
$$6x + 4y = 5.$$

5. A 100 000-nél kisebb természetes számok közt azok vannak-e többen, amelyek 10-es számrendszerben írt alakjában előfordul az 1-es számjegy vagy azok, amelyekben nem fordul elő?

6. Van-e olyan hatjegyű négyzetszám, amelynek számjegyei valamilyen sorrendben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok?

7. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszöget a két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja, akkor a négyszög paralelogramma.

8. Egy téglatest élei 4, 16 és 27 egységnyi hosszúak. Vágjuk szét legfeljebb 15 részre úgy, hogy azokból egy kockát lehessen összeállítani.

9. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok a pontok, amelyeknek (x, y) koordinátái kielégítik az alábbi két egyenlőtlenséget:

$$|x| + |y| < 3,$$
$$|x + y| + |x - y| < 4.$$

10. Adott az ABC háromszög köré írt kör sugara, az A-ból induló szögfelező hossza és a háromszög köré írt kör középpontját A-val összekötő egyenesnek a BC egyenessel alkotott szöge. Szerkesszük meg a háromszöget!

11. Egy nagy víztárolót egy állandó erősségű forrás táplál. A víztárolóból egy óriásszivattyú és 18 egyforma teljesítményű kis szivattyú emeli ki a vizet. Az óriásszivattyú percenként 32-szer annyi vizet emel ki, mint egy-egy kis szivattyú. Ha a víztároló éppen félig van vízzel és az összes szivattyú működik, akkor 5 nap és 20 óra múlva kiürül. Ha a tároló 3/4 részéig van vízzel, és csak az óriásszivattyút működtetjük, akkor a tároló 4 nap és 14 óra múlva megtelik. Jelenleg a tároló harmadrésze van megtöltve. Hány szivattyút kell bekapcsolnunk, ha azt akarjuk, hogy az elkövetkezendő 90 nap folyamán ne teljen meg, de ki se ürüljön a víztároló? (Ez alatt a 90 nap alatt nem változtatunk azon, hogy mely szivattyúk működnek és melyek nem.)

12. Egy futóversenyen négyen vettek részt: A, B, C, D. A versenyt egy N néző is végignézte. A verseny után a következőket mondták:

A: – Nem én nyertem, de C-t megelőztem.
B: – Megelőztem C-t.
C: – D előbb ért célba, mint B.
D: – Nem én voltam az utolsó.
N: – Az előbb az első helyezett nem mondott igazat, a többiek igazat mondtak.

Az eredményhirdetéskor kiderült, hogy ezen öt kijelentés közül legalább három igaz. Bizonyítsuk be, hogy C nincs az első két helyezett között. Lehetséges-e, hogy N igazat mondott.

I. forduló, haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Egy téglalap két oldala 20 cm és 30 cm. A téglalap két szemközti csúcsából kiindulva mind a négy oldalára egyenlő hosszúságokat mérünk fel; ezek második végpontjai paralelogrammát alkotnak. Mekkora hosszúság felmérése esetén lesz az említett paralelogramma területe maximális?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$x + y + z = 0,$$

akkor

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right) = \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}.$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala 14 cm, BC oldala 13 cm, a C pontból induló magassága 12 cm. Számítsuk ki annak a körnek a sugarát, amelyik érinti a háromszög két említett oldalát, és a kör középpontja a háromszög CA oldalán van.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c és d számok pozitívak és

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=2-\sqrt{3},$$

akkor

$$ad+bc+2\sqrt{abcd}-\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=0.$$

5. Az adott AB, BC, CD, DE és EA szakaszokra fennáll az

$$AB<CD \qquad \text{és} \qquad DE<BC$$

két egyenlőtlenség. E szakaszokból olyan $ABCDE$ konvex ötszög szerkesztendő, amelyben $AB \parallel CD$ és $DE \parallel BC$.

6. Állapítsuk meg közelítő törtek felhasználása nélkül, hogy a következő különbségek közül melyik nagyobb:

$$\sqrt{11}-\sqrt{5}, \qquad \text{vagy} \qquad \sqrt{19}-\sqrt{11}\ ?$$

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\big||x+2|-3\big|=1.$$

8. Közös síkban fekvő két kör középpontjának távolsága 20 cm, sugaraik 2 cm és 6 cm. Tekintsük mindazokat az egyenesszakaszokat, melyek egyik végpontja az egyik körön, a másik végpontja a másik körön fekszik. Mi a mértani helye e szakaszok felezőpontjainak?

9. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\sqrt{3}+3}+\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\sqrt{3}+3}-\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1}}=1+\sqrt{3}.$$

10. Egy magasugró versenyen 10 versenyző vett részt, akiket $A,B,\dots,K$ betűkkel jelölünk. A versenyzők a betűk sorrendjében ugrottak, és a betű után zárójelbe tett szám azt mutatja, hogy a kérdéses versenyző az addigiak közül hányadik lett.

$$A\ (1),\ B\ (2),\ C\ (1),\ D\ (4),\ E\ (4),\ F\ (1),\ G\ (1),\ H\ (3),\ I\ (3),\ K\ (6).$$

a) Megállapítandó a végső sorrend!

b) Ha az „addigi sorrendet” általánosan A (a), B (b), ..., K (k)-val jelöljük, azaz az addigi sorszám A esetében a, B esetében b, ..., K esetében k, – milyen feltételeket kell teljesíteniük az $a,b,\dots,k$ számoknak, hogy az abszolút sorrendet meg lehessen belőlük állapítani?

11. Tekintsük mindazokat a háromszögeket, melyek 3 csúcsát egy a oldalú szabályos hatszög csúcsai közül választottuk ki!

a) Hány ilyen háromszög van?

b) A hatszög egy-egy főátlójára hány ilyen háromszög súlypontja esik, és ezek mekkora távolságra vannak a hatszög középpontjától?

12. Az

$$x^3-3x^2+2x+C=0$$

egyenlet egyik gyöke egy másik gyökének kétszerese. Mekkora lehet C, és mekkorák az egyenlet gyökei?

II. forduló, kezdők (legföljebb I. osztályosok), **általános tantervű és szakosított matematika-fizika tantervű osztályok részére**

1. Egy folyószakaszt egy motorcsónak fölfelé 9 óra alatt, lefelé 4 óra 36 perc alatt tesz meg. Útja egy részén a víz sebessége kétszer akkora, mint másutt. Ezt a részt fölfelé 3-szor annyi idő alatt teszi meg, mint lefelé. Hányad része az egész út hosszának a sebesebb folyású rész?

2. Egy kör két egymásra merőleges sugara OP és OQ. A körbe beírt ABC háromszög A csúcsa a rövidebbik PQ íven van és AB oldala OP-vel, AC oldala OQ-val párhuzamos. Tekintsük az ABC háromszögbe beírt és az oldalaihoz hozzáírt körök középpontjait. Mi a mértani helye e négy középpontnak, ha A befutja a PQ negyedkört?

3. Egy fa ágai kör alakban helyezkednek el. Az ágakon verebek ülnek. Megrázva a fát, két veréb felszáll és az egyik az óramutató járásával egyező, a másik azzal ellentétes irányban haladva egy ággal arrébb repül. – Lehetséges-e, hogy

a fa többszöri megrázása után mindegyik veréb ugyanarra az ágra kerül, ha a fának 44 ága van és eredetileg minden ágon egy veréb ül?

II. forduló, kezdők (legföljebb I. osztályosok), szakosított tantervű matematikai osztályok részére

1. Mely n természetes számokra lesz

$$n^n + 1$$

10^{18}-nál kisebb törzsszám?

2. Azonos az előző felsorolás 2. feladatával, azzal a megkülönböztetéssel, hogy az A pont befutja az egész kört.

3. Az asztalon n dobozban golyók vannak (némelyik doboz üres is lehet). Csaba a következő szabály szerint játszik: áttehet egy dobozból néhány golyót egy másikba, de csak akkor, ha ezáltal a másik dobozban levő golyók száma megduplázódik. Milyen n értékekre lehetséges az, hogy a fenti szabály betartásával Csaba az összes golyót egy dobozba tudja gyűjteni, abból a helyzetből kiindulva, amikor mindegyik dobozban pontosan egy golyó van?

II. forduló, haladók (legföljebb II. osztályosok), általános tantervű és szakosított matematika-fizika tantervű osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} xy &= zu, \\ x^2 + y^2 &= z^2 + u^2 - 48, \\ x^2 + u^2 &= y^2 + z^2 + 80, \\ x^4 + y^4 &= z^4 + u^4 - 8160. \end{aligned}$$

2. Mely n-ekre osztható 1972-vel

$$S = 345^n + 179^n - 5^n - 26^n + 493^n \ ?$$

3. Adott egy háromszög. Szerkesszük meg azt a kört, amelyik a háromszög mindegyik csúcsából feleakkora szög alatt látszik, mint a háromszögnek a kérdéses csúcsnál fekvő szöge.

II. forduló, haladók (legföljebb II. osztályosok), szakosított tantervű matematikai osztályok részére

1. Az

$$x^3 + px + q = 0$$

harmadfokú egyenlet együtthatói, p és q egész számok, és az egyenlet egyik gyöke: $x_1 = 2 + \sqrt{7}$. – Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet egy másik gyöke $x_2 = -4$. Határozzuk meg az egyenlet harmadik gyökét.

2. Legyen adva n szám, amelyek összege

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1,$$

és ezenkívül

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq \frac{k}{n}, \quad \text{ahol} \quad 1 \leq k \leq n.$$

3. Adott egy egységnyi oldalú szabályos hatszöglemez. Vágjuk be a lemezt minden oldal felezőpontján átmenő egy-egy h hosszúságú egyenes szakasszal, úgy, hogy a lemez e hat bevágás után ne essék szét. Bizonyítandó, hogy ez a követelmény $h < 1$ esetén kielégíthető, míg $h \geq 1$ esetén a feladatnak nincs megoldása.