I. forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$7^{x+1}-6^{y+3}=1$$
$$6^{y+2}-7^{x}=5(6^{y}+1).$$

2. Egy 5 cm sugarú kört egy szelő az A és B pontban metsz. A szelő egy P pontjától A és B 12,8 cm, ill. 20 cm távolságra van. Húzzunk P-ből érintőt a körhöz, az érintési pont legyen C. Határozzuk meg az AC és BC szakaszok hosszának az arányát.

3. Az ABC derékszögű háromszög AC, ill. BC befogóján úgy választjuk az X ill. Y pontokat, hogy az

$$\frac{AX}{XC}+\frac{BY}{YC}=1$$

egyenlőség fennálljon. Bizonyítsuk be, hogy az XY egyenes átmegy a háromszög súlypontján.

4. Adott egy r sugarú kör és annak síkjával párhuzamosan, a síktól r távolságban egy AB szakasz, amelyiknek merőleges vetülete a kör síkján a kör egy átmérője. Az AB szakasz minden belső pontjából két, a végpontjaiból egy-egy AB-re merőleges olyan félegyenest indítunk, amelyeknek van közös pontja a körrel. Milyen vonalat alkotnak annak a síknak a félegyenesekkel való metszéspontjai, amelyik párhuzamos a kör síkjával és mind attól, mind AB-től $r/2$ távolságra van?

5. Az a, b, x, y, z valós számokra fennáll, hogy

$$x^2=a^2+y^2=b^2+z^2=(a+b)^2+(y-z)^2.$$

Fejezzük ki x-et a-val és b-vel.

6. Milyen n természetes számokra osztható 72-vel a következő összeg:

$$3^{(n+1)(n+2)}+63\ ?$$

7. A $\cos x$ és $\sin 2x$ függvényeket ábrázoló görbéknek a nyílt $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumbeli közös pontjában mindegyik görbéhez megrajzoljuk az érintőt. Mekkora szöget zárnak be egymással az érintők? Írjuk le szemlélet alapján, hogyan haladnak a görbék a két érintő által meghatározott négy szögtartományban. (Vagyis: melyik negyedben hány ív távolodik a közös ponttól?)

8. Egy ismerkedési estre összegyűlő társaság tagjairól tudjuk, hogy nincs köztük 4 (különböző) ember, A, B, C, D úgy, hogy A ismeri B-t, B ismeri C-t, C ismeri D-t. Bizonyítsuk be, hogy akkor szét lehet osztani 3 terembe a társaságot úgy, hogy egy-egy termen belül senki sem ismer senkit. (Az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük, azaz ha A ismeri B-t, akkor B is ismeri A-t.)

II. forduló

Általános és szakosított matematika-fizika tantervű osztályok részére

1. Határozzuk meg az

$$f=\frac{x}{2}+y-z$$

háromváltozós függvény maximumát a következő feltételekkel:

$$|x-2y+z|\le 2,$$
$$|y|\le 3,$$
$$x\cdot z\ge 0.$$

2. Egy urnában 8 különböző színű golyó van. Kihúzunk egyet és visszatesszük. Ezt összesen tízszer elvégezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ily módon mindegyik golyó legalább egyszer a kezünkbe kerül?

3. Kivágtunk papírból egy ABC egyenlő szárú háromszöget. Az AB alapon felvettük az A-hoz közelebb eső D és a B-hez közelebb eső E pontot. Az ACD és BCE háromszöget a CD, illetve CE hajtásvonal körül forgatva, az A és B csúcs az F pontban találkozott. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög C csúcsának a DEF háromszög síkjára való merőleges vetülete egybeesik a DEF háromszög DE oldalához tartozó külső érintő kör középpontjával.

A speciális matematikai tantervű osztályok részére

1. A sík egymástól különböző A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 pontjaira

$$A_1B_2C_1\sphericalangle = B_1C_2A_1\sphericalangle = C_1A_2B_1\sphericalangle = 90^\circ,$$
$$A_2B_1 = B_1C_2, \qquad B_2C_1 = C_1A_2, \qquad C_2A_1 = A_1B_2.$$

Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egyenes egy ponton megy keresztül.

2. A $0 < x < 1$ intervallumban értelmezett $f(x)$ függvény x-hez azt a 0 és 1 közötti számot rendeli, amelyiknek tízes számrendszerbeli alakjában az n-edik tizedes jegy n-nel vagy 0-val egyenlő aszerint, hogy x n-edik tizedes jegye egyenlő volt-e n-nel vagy sem ($n = 1, 2, \ldots$). Integrálható-e az $f(x)$ függvény a $(0, 1)$ intervallumban, és ha igen, mennyi az integrálja?

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges, a $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett $f(x)$, $g(x)$ függvénypárhoz van olyan $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, amelyre
$$\left|f(x) + g(y) - xy\right| \ge \frac{1}{4}.$$