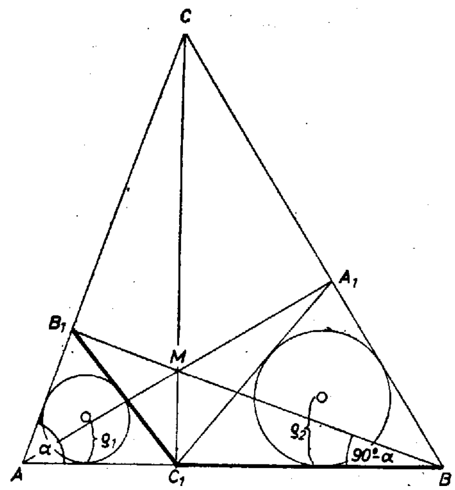
Jelöljük a keresett háromszög szögeit α-val, β-val, γ-val, az adott sugarakat ϱ_1-gyel és ϱ_2-vel.

I. Tegyük fel először, hogy a keresett háromszög hegyesszögű ($\alpha < 90°$). A B_1, C_1 csúcsok rajta vannak a BC szakasz feletti Thalész–körön, ezért a B_1C szakasz a C_1 pontból akkora szög alatt látszik, mint B-ből, tehát a látószög $(90° - \gamma)$ (1a. ábra).

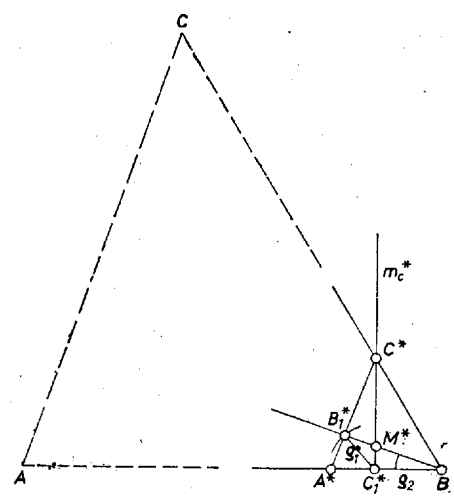


1a. ábra

Így az AB_1C_1 háromszögnek C_1-nél levő szöge egyenlő γ-val, amiből már következik, hogy $AB_1C_1 \sphericalangle = \beta$. Ugyanígy kapjuk, hogy a BA_1C_1 háromszögben A_1-nél α, C_1-nél pedig γ nagyságú szög van. Emiatt az AB_1C_1, és A_1BC_1 háromszögek hasonlók (csúcsaik a felsorolás sorrendjében felelnek meg egymásnak), és így megfelelő oldalaik aránya megegyezik a beírható köreik sugarával, például

$$B_1C_1 : BC_1 = \varrho_1 : \varrho_2. \tag{1}$$

Ennek alapján a BC_1B_1 háromszöghöz hasonló $BC_1^*B_1^*$ háromszöget szerkesztünk: ϱ_2 hosszúságú BC_1^* szakasz B végpontjához felmérjük a $(90° - \alpha)$ szöget, és ennek a szárát elmetsszük a C_1^* középpontú, ϱ_1 sugarú körrel (1b. ábra).



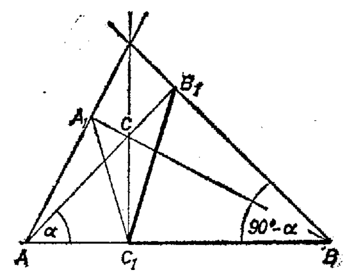
1b. ábra

Mivel a keresett $BC_1^*B_1^*$ háromszögben C_1^*-nál tompaszög van, megfelelő háromszöget csak akkor kapunk, ha

$$\varrho_1 > \varrho_2 \text{ tg } (90° - \alpha) = \varrho_2 \text{ ctg } \alpha. \tag{2}$$

Ha a (2) feltétel teljesül, a ϱ_1 sugarú, C_1^* középpontú körön keletkező metszéspontok között van olyan, amelyik a BC_1^* egyenesre C_1^*-ben emelt m_c^* merőleges B-t nem tartalmazó oldalán van, legyen ez B_1^*. Jelöljük BB_1^* és m_c^* metszéspontját M^*-gal, és messe a BB_1^* egyenesre B_1^*-ban emelt merőleges a BC_1^* egyenest A^*-ban, az A^*M^* egyenesre B-ből bocsátott merőleges pedig az $A^*B_1^*$ egyenest C^*-ban. Szerkesztésünk szerint a kapott A^*BC^* háromszög hasonló a keresett ABC háromszöghöz, tehát belőle alkalmas nagyítással megkapjuk az ABC háromszöget.

II. A tompaszögű háromszögek vizsgálatát kezdjük a $\gamma > 90°$ esettel, így tehát az adott α szög továbbra is hegyesszög. Ekkor a B_1C szakasz a B, C_1 csúcsokból $(\gamma - 90°)$-os szög alatt látszik (2. ábra), és az AB_1C_1 háromszögben C_1-nél ismét γ nagyságú szög van; az AB_1C_1, A_1BC_1 háromszögek most is hasonlók, és fennáll (1).



2. ábra

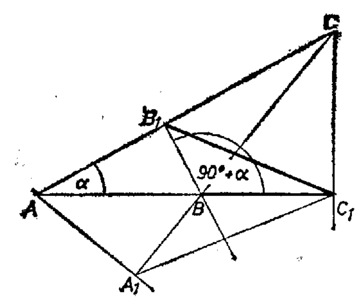
A $BC_1^*B_1^*$ háromszöget ugyanúgy szerkeszthetjük meg, mint az előbb, csakhogy most hegyesszögű háromszöget várunk, tehát a szerkeszthetőség feltétele (2) helyett

$$\varrho_2 \text{ ctg } \alpha > \varrho_1 > \varrho_2 \cos \alpha. \tag{3}$$

A szerkesztés befejezése ugyanúgy történik, mint az előbb.

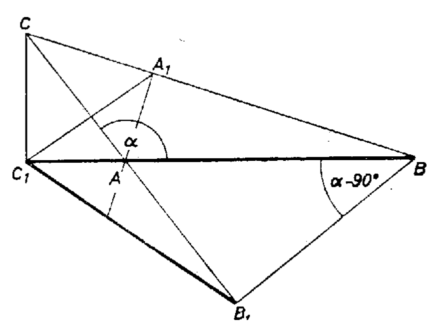
II′. Ha $\beta > 90^\circ$ (3. ábra), akkor a $BC_1^*B_1^*$ háromszögnek a $(90^\circ - \alpha)$ nagyságú szög külső szöge, tehát a szerkesztés úgy módosul, hogy B-ben nem $(90^\circ - \alpha)$-t, hanem $(90^\circ + \alpha)$-t mérünk fel, és ennek megfelelően szerkeszthetőség feltétele

$$\varrho_1 > \varrho_2.$$



3. ábra

II″. Ha $\alpha > 90^\circ$ (4. ábra), akkor B-ben $(\alpha - 90^\circ)$-os szöget kell felmérnünk, és a $BC_1^*B_1^*$ háromszögben B_1^*-nál tompaszöget várunk.



4. ábra

Így a szerkeszthetőség feltétele

$$\varrho_2 > \varrho_1 > \varrho_2 \sin(\alpha - 90^\circ) = \varrho_2 |\cos \alpha|. \tag{5}$$

Ha a keresett háromszögben C-nél derékszög van, úgy C azonos A_1-gyel és B_1-gyel, és

$$\varrho_1 = \varrho_2 \text{ ctg } \alpha. \tag{6}$$

Ekkor a szerkesztés az első változat szerint végezhető el, a ϱ_1 sugarú kör érinti a $(90^\circ - \alpha)$ nagyságú szög szárát.

Ha $\beta = 90^\circ$, akkor $\varrho_2 = 0$ és B azonos C_1-gyel. A szerkesztés az első változat szerint ismét elvégezhető, C_1^* azonos B-vel, tehát a $(90^\circ - \alpha)$ nagyságú szög szárának egyszerűen felmérjük B-ből a ϱ_1 szakaszt. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor kell, hogy $\varrho_1 = 0$ legyen, ha viszont ez teljesül, a derékszögű ABC háromszögben csak egy adatunk van, a ϱ_2 sugár, ami nem határozza meg egyértelműen a háromszöget. Könnyen látható, hogy valóban végtelen sok, a feltételeknek eleget tevő háromszög szerkeszthető.

Összefoglalva eredményeinket, a szerkeszthetőség feltétele rendre a következő:

– ha $\alpha < 90^\circ$, akkor $\varrho_1 > \varrho_2 \cos\alpha \geqq 0$,

ha ez teljesül, a $\varrho_1 \leqq \varrho_2$ és a $\varrho_2 = 0$ esetben egy, a $\varrho_1 > \varrho_2 > 0$ esetben két megoldást kapunk;

– ha $\alpha = 90^\circ$, akkor a feltétel

$$\varrho_2 > \varrho_1 = 0,$$

és ha ez teljesül, végtelen sok megoldás van;

– ha $\alpha > 90^\circ$, akkor

$$\varrho_2 > \varrho_1 > \varrho_2 |\cos\alpha| > 0,$$

ha ez teljesül, egy megoldás van. – A megoldást befejeztük.