Polinomok és végtelen polinomok

II. rész

A cikk első részében[1] végtelen (néha véges) polinomok segítségével néhány ismert és új összefüggésre bukkantunk, amelyek helyessége azután vagy belátható volt más úton is, vagy csak néhány speciális esetben ellenőriztük őket. Ahhoz, hogy azt az utat, amin ezeket az összefüggéseket nyertük, azok bizonyításának is tekinthessük, tisztáznunk kell a végtelen polinomokkal való számolás tulajdonságait.

Akit elsősorban a további alkalmazások érdekelnek, az lapozzon a 200. oldalra, elfogadva, hogy az együttható–összehasonlítással nyert összefüggéseket joggal tekintjük bizonyítottaknak. Erről ráér bármikor később is meggyőződni, visszalapozva a cikk elejére.

Kissé zavaró lehet az, hogy a polinomok felírásában, a műveletek bevezetésében és tulajdonságaik vizsgálatában is használunk már összeadás, kivonás, szorzás és hatványozás jeleket (illetőleg azt a megállapodást, hogy műveletjel nélkül egymás mellé írással szorzást jelölünk, pl. $27x^5 = 27 \cdot x^5$).

Ezeket a polinom felírásában szereplő műveletjeleket most szintén csak a jelsorozat jeleinek kell tekintenünk, amelyeknek semmi műveleti jelentést nem tulajdonítunk, és a polinomok közötti összeadást, kivonást, szorzást, hatványozást újabb jelekkel, pl. vastag $\mathbf{+}$, $\mathbf{-}$, kövér $\boldsymbol{\cdot}$ ill. az alap- és kitevő közé írt $^\circ$ jellel kellene jelölnünk (pl. $x^5 = (x \,^\circ\, 5)$.

El is kerülhetjük azonban egy polinom felírásában a műveleti jeleket, hiszen a polinomot egyértelműen meghatározza a benne szereplő együtthatók sorozata. Elég tehát ezeket az együtthatókat sorra egymás után írni, csak nem szabad megfeledkezni arról, hogy a „hiányzó x- hatványokat” 0 együtthatóval jelenlevőknek tekintjük. Ezeket a 0-kat is ki kell tehát írnunk a maguk helyén. Így például az

$$\mathbf{1} - 2x^4 - 2x^5 + 3x^8 + 3x^9 + 3x^{10} - 4x^{12} - 4x^{13} - 4x^{14} - 4x^{15} + \\ + 5x^{16} + \ldots + 5x^{19} - 6x^{20} - \ldots$$

polinomot így fogjuk rövidebben jelölni:
$(1,\, 0,\, 0,\, 0,\, -2,\, -2,\, 0,\, 0,\, 3,\, 3,\, 3,\, 0,\, -4,\, -4,\, -4,\, -4,\, 5,\, 5,\, 5,\, 5,\, -6,\, \ldots)$;
általában egy

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

polinomot így:

$$(a_0,\, a_1,\, \ldots\, a_n,\, \ldots).$$

Természetesen használunk egy betűt is polinomok jelölésére, pl. $A = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$. Ha a polinomok megjelölésében indexet használunk, akkor az együtthatók jelölésére kettős indexet is fogunk használni,[2] pl.

$$c_4 = (c_{40},\, c_{41},\, \ldots,\, c_{4n},\, \ldots).$$

Polinomok közt végeztünk összeadást és szorzást; ha

$$A = (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots), \qquad B = (b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_n,\, \ldots),$$

akkor legyen

(1) $\quad A + B = (a_0 + b_0,\, a_1 + b_1,\, \ldots,\, a_n + b_n,\, \ldots)$,

(2) $\quad A \cdot B = (a_0b_0,\, a_0b_1 + a_1b_0,\, \ldots,\, a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0,\, \ldots)$.

A kivonás és osztás értelmezését már ezekre visszavezethetjük, amint azt mindjárt látni fogjuk. Használtunk azonban egy további műveletet is, végtelen soktagú összeget, pl. mikor ilyen polinomot írtunk fel (a Fibonacci–sorozat tárgyalásánál)[3]

$$1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + \ldots + (x + x^2)^n + \ldots$$

és ezt azután végtelen polinommá rendeztük. Ez azért volt lehetséges, mert egy–egy x-hatvány csak véges sok összeadandóból adódott, ugyanis minden összeadandó magasabb és magasabb fokú taggal kezdődik.

Értelmezzük tehát az $A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$ alakú végtelen összegeket is a megfelelő együtthatók összeadásával, de csak abban az esetben, ha biztosítva van, hogy az összeg minden együtthatója ilyen módon véges összeg legyen, csak véges sok 0-tól különböző adott sorszámú együttható legyen. Az

$$A_k = (a_{k0},\, a_{k1},\, \ldots,\, a_{kn},\, \ldots) \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots$$

[1] *Surányi J.:* Polinomok és végtelen polinomok I. rész. K.M.L.45 (1972) 109–117. Erre a továbbiakban röviden PI jellel fogok hivatkozni.

[2] Itt tehát pl. c_{47} „cé négy hét”-nek és nem "cél negyvenhét”-nek olvasandó.

[3] Lásd PI 116. old.

polinomokról ehhez azt kívánjuk meg, hogy minden m pozitív egészhez legyen olyan k_m korlát, hogy azokban az A_k-kban, amelyekre $k > k_m$, már az m és annál kisebb indexű együtthatók 0-k legyenek:[4]

$$a_{kj} = 0, \qquad \text{ha} \qquad k > k_m \qquad \text{és} \qquad j \leqq m. \tag{3}$$

Ha ez teljesül, akkor tehát így definiáljuk a végtelen összeget:[5]

$$\begin{gathered} A_0 + A_1 + \ldots + A_k + \ldots = (a_{00} + a_{10} + \ldots + a_{k0} + \\ + \ldots, \ldots, a_{0n} + a_{1n} + \ldots a_{kn} + \ldots, \ldots) \\ \big(= (a_{00} + \ldots + a_{k_0 n}, \ldots, a_{0_n} + \ldots + a_{k_n n}, \ldots) \big). \end{gathered} \tag{4}$$

Ezekről a műveletekről könnyű belátni, hogy rendelkeznek a szokásos tulajdonságokkal: az összeadás is, a szorzás is kommutatív és asszocitív, azaz ha A, B, C tetszés szerinti polinomok, akkor

$$A + B = B + A,\ A \cdot B = B \cdot A,\ (A + B) + C = A + (B + C),\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

a szorzás az összeadásra nézve disztributív:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

A végtelen összeg tetszés szerint átrendezhető, azaz ha az i_0, i_1, ..., i_k, ... sorozatban minden nem–negatív egész előfordul és mindegyik csak egyszer, akkor

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots = A_{i_0} + A_{i_1} + \ldots + A_{i_k} + \ldots ;$$

érvényes továbbá a végtelen összegre is a disztributivitás:

$$B \cdot (A_0 + A_1 + \ldots + A_k + \ldots) = B \cdot A_0 + B \cdot A_1 + \ldots + B \cdot A_k + . \tag{5}$$

A végtelen összegre vonatkozó ezen két összefüggés úgy értendő, hogy ha az egyik oldalnak van értelme, akkor a másiknak is, és a kettő egyenlő, kivéve ha disztributív tulajdonságnál B minden együtthatója 0. Ezt a polinomot O-val jelölve ez esetben a jobb oldal minden összeadandója O, így az összegnek mindig van értelme, és az is O. Világos, hogy ekkor, ha a bal oldali végtelen összegnek is van értelme, akkor a bal oldal is O-val egyenlő.

Az állítások bizonyítása egyszerű kiszámolásból áll. Ezt a szorzat asszociativitása és a végtelen összeg tulajdonságai esetében végzem el, de ajánlom, hogy az olvasó ennek mintájára igazolja a többi azonosságot is. – Ha

$$\begin{gathered} A = (a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots), \quad B = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots), \\ C = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots), \end{gathered}$$

akkor a (2) definíció szerint $(A \cdot B) \cdot C$-ben az n indexű együttható

$$\begin{gathered} (a_0 b_0) c_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_{n-1} + \ldots + (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0) c_{n-k} + \ldots + \\ + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) c_0. \end{gathered}$$

Másrészt $A \cdot (B \cdot C)$-nek n indexű együtthatója

$$\begin{gathered} a_0 (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0) + a_1 (b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} + \ldots + b_{n-1} c_0) + \ldots + \\ + a_k (b_0 c_{n-k} + b_1 c_{n-k-1} + \ldots + b_{n-k} c_0) + \ldots + a_n (b_0 c_0). \end{gathered}$$

Az első kifejezésben minden zárójelet felbontva megkapjuk az összes olyan $a_i b_j c_k$ alakú szorzatokat, amelyekben $i + j + k = n$. Ugyanezt mondhatjuk azonban el a második kifejezésről is. Eszerint az $(A \cdot B) \cdot C$ és $A \cdot (B \cdot C)$ polinom egyező indexű együtthatói egyenlők, vagyis a két polinom megegyezik.

A végtelen összegek esetében először azt kell belátnunk – amint erre már utaltam –, hogy vagy mind a két oldalnak van értelme, vagy egyiknek sem. Az átrendezésre vonatkozó azonosságnál vegyük először is észre, hogy a bal oldal is egy átrendezése a jobbnak, hiszen ha az i_0, i_1, ..., i_k, ... sorozatban előfordul a 0, 1, 2, ..., k, ... számok mindegyike és mindegyik csak egyszer, akkor az utóbbi sorozatban is előfordul i_0, i_1, ..., i_k, ... mindegyike és mindegyik csak egyszer. Így elég azt belátni, hogy ha a bal oldal értelmezve van (3)–(4) szerint, akkor a jobb is.

[4] Ahhoz, hogy a végtelen összegnek értelme legyen, elég volna egy látszólag valamivel gyengébb kikötést tenni, tudniillik azt, hogy minden m-hez legyen olyan k'_m korlát, hogy csak $a_{km} = 0$ teljesüljön a $k'm$-nél nagyobb k-kra. Ebből azonban már következik, hogy alkalmas k_m-től a (3) is teljesül: választhatjuk k_m-nek a k'_0, k'_1, k'_1 ..., k'_m közt előforduló legnagyobb értéket. Másrészt látni fogjuk, hogy a disztributivitás igazolásához lényeges lesz a (3)-mal kifejezett erősebb követelmény teljesülése.

[5] Megjegyezzük, hogy ha az 1-nél nagyobb indexű összeadandók mindegyike a 0 poliom, azaz az a polinom, amelyiknek minden együtthatója 0, akkor speriális esetként kapjuk ebből az (1) összeadást is.

Tegyük fel tehát, hogy minden nem–negatív m-hez van olyan k_m, amelyre (3) teljesül, ekkor meg kell adnunk olyan l_m-et, amire igaz az, hogy ha $l > l_m$ és $j \leqq m$, akkor

$$a_{i,\,j} = 0.$$

Tudjuk, hogy legfeljebb az A_0, A_1, …, A_{k_m} polinomok m-nél nem nagyobb indexű együtthatói között lehet 0-tól különböző. Nézzük meg, ezek milyen i_{j_0}, i_{j_1}, …, $i_{j_{k_m}}$ sorszámot kaptak az átrendezésben, és ezek közül keressük ki a legnagyobbat. Ezt választhatjuk l_m-nek.

Az átrendezésre vonatkozó azonosság helyessége most már magától értetődő, hiszen a bal oldalon is, a jobbon is az m indexű együttható az egyes polinomokban fellépő m indexű együtthatók összege. Ezek 0 összeadandóktól eltekintve véges összegek, és mivel ezek tagjai számok, az összeget nem változtatja meg az, ha a tagok sorrendjét megváltoztatjuk és 0 tagokat írunk közéjük vagy hagyunk el.

A disztributív tulajdonságnál foglalkoztunk már a $B = O$ esettel, így a továbbiakban feltesszük, hogy $B \neq O$. Legyen i az a legkisebb index, amire $b_i \neq 0$. Ha A_k-ban a_{ki_k} az első el nem tűnő együttható, akkor $B \cdot A_k$-nak az $i + i_k$-nál kisebb együtthatói 0-k, mert $b_r a_{ks}$ szorzatok összegei, és ezekben az $r + s$ összeg $i + i_k$-nál kisebb, így vagy $r < i$, s így $b_r = 0$, vagy ha nem, akkor $s < i_k$ kell hogy legyen, s így $a_{ks} = 0$. Hasonló igaz az $i + i_k$ indexű együtthatót adó tagokra is az egyetlen $b_i a_{ki_k}$ tag kivételével. Így ez a tag nem nulla, a többi nulla, tehát a $B \cdot A_k$ első el nem tűnő együtthatója az $i + i_k$-adik.

Eszerint, ha az (5) bal oldalán szereplő végtelen összegnek van értelme, és az m indexhez k_m egy megfelelő korlát ($m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$), akkor a jobb oldalon $m < i$-re bármely érték, pl. 0 is megfelel l_m-nek (egyik tagban sem lép fel i-nél kisebb indexű, 0-tól különböző együttható), ha pedig $m \geqq i$, akkor l_m-nek választható k_{m-i}. Fordítva, ha a jobb oldalon m-hez az l_m korlát megfelelő $m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ esetén, akkor a bal oldali összeghez $k_m = l_{m+i}$ alkalmas korlát lesz, a két oldalnak tehát egyidejűleg van vagy nincs értelme.

Tegyük fel, hogy mindkét oldal értelmezve van, akkor az n indexű együttható a bal oldalon

$$b_0(a_{0^n} + a_{1^n} + \ldots + a_{k^n} + \ldots) + b_1(a_{0,^{n-1}} + a_{1,^{n-1}} + \ldots + a_{k,^{n-1}} + \ldots) +$$
$$+ \ldots + b_n(a_{00} + a_{10} + \ldots + a_{k0} + \ldots),$$

a jobb oldalon pedig

$$(b_0 a_{0^n} + b_1 a_{0,^{n-1}} + \ldots + b_n a_{00}) + (b_0 a_{1^n} + b_1 a_{1,^{n-1}} + \ldots + b_n a_{10}) + \ldots +$$
$$+(b_0 a_{kn} + b_1 a_{k,^{n-1}} + \ldots + b_n a_{k0}) + \ldots$$

Tudjuk azonban, hogy mindkét oldalon véges összeg áll (végtelen sok nulla értékű tagtól eltekintve). Így alkalmazhatjuk a számok közt érvényes kommutatív, asszociatív és disztributív tulajdonságot. Például az utóbbi összeg minden zárójelének első tagját összegyűjtve és kiemelve b_0-t, majd a második tagok összegéből b_1-et s i. t., végül az $n+1$-edik tagok összegéből b_n-et, az első kifejezést kapjuk. Beláttuk tehát, hogy az (5) két oldalán álló polinom is együtthatóról együtthatóra megegyezik.

Most már könnyen visszatérhetünk a polinomok szokásos írásmódjára, csak néhány egyszerű összefüggést kell megfigyelni. A O polinom úgy viselkedik a polinomok körében, mint a 0 a számok körében, a nulla polinomnak is fogjuk nevezni: ha A tetszés szerinti polinom, akkor

$$A + O = A, \quad A \cdot O = O.$$

Ugyancsak egyszerűen viselkednek azok a polinomok, amelyekben a második (1-indexű) együtthatótól kezdve mindegyik 0, tehát az ilyen alakúak: $S = (s,\, 0,\, 0,\, \ldots)$. Ha $T = (t,\, 0,\, 0,\, \ldots)$ szintén ilyen alakú polinom, akkor

$$S + T = (s + t,\, 0,\, 0,\, \ldots), \qquad S \cdot T = (st,\, 0,\, 0,\, \ldots)$$

és

$$S \cdot A = (sa_0,\, sa_1,\, \ldots,\, sa_k,\, \ldots).$$

Szavakban: ilyen polinomok összege és szorzata is ilyen alakú, mégpedig az összeg, ill. a szorzat 0 indexű együtthatója az egyes polinomok ilyen együtthatóinak az összege, ill. szorzata. Egy tetszés szerinti polinomot pedig úgy szorzunk egy ilyen polinommal, hogy minden együtthatót megszorzunk a szorzó 0 indexű együtthatójával.

Ezek a polinomok tehát úgy viselkednek a műveletek szempontjából, mint a számok, úgy fogjuk nevezni őket, hogy konstans polinomok és azonosítani fogjuk őket a 0 indexű együtthatójukkal: Ezek között szerepel a O nulla–polinom is. Ennek alapján tehát azt írhatjuk pl., hogy

$$S \cdot A = s \cdot A = (sa_0,\, sa_1,\, \ldots,\, sa_n,\, \ldots). \tag{6}$$

A szorzás alapján értelmezhetjük a hatványozást is (nem–negatív egész kitevőre) pl. a következő rekurzív definícióval:

Ha $A \neq O$, legyen

$$A^0 = 1 = (1,\, 0,\, 0,\, \ldots),$$
$$A^{n+1} = A^n \cdot A \quad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots);$$

legyen továbbá, ha n pozitív egész[6]; $O^n = O$. (Ekkor O-ra is igaz $O^{n+1} = O^n \cdot O$, ha n pozitív egész.)

Ekkor könnyű igazolni teljes indukcióval – végezze el mindenki saját maga –, hogy

$$A^m A^n = A^{m+n}, \qquad (A^m)^n = A^{m \cdot n}, \qquad (A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n,$$

valahányszor mindkét oldalnak van értelme.

Érdekesen viselkedik a szorzás szempontjából a $(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)$ polinom:

$$(0,\, 1,\, 0,\, \ldots) \cdot A = (0,\, a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{k-1},\, \ldots),$$

amint az (2) alapján azonnal adódik. (Ez várható is, hiszen a $(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)$ az x helyébe lépett, és az x-szel való szorzás minden tag fokát eggyel növeli). Speciálisan

$$(0,\, 1,\, 0,\, \ldots) \cdot (0,\, 1,\, 0,\, \ldots) = (0,\, 1,\, 0,\, \ldots)^2 = (0,\, 0,\, 1,\, 0,\, \ldots),$$
$$(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)^3 = (0,\, 1,\, 0,\, \ldots)^2 \cdot (0,\, 1,\, 0,\, \ldots) = (0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, \ldots),$$

és általában

(7) $$(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)^n = (\underbrace{0,\, \ldots,\, 0}_{n \text{ darab}},\, 1,\, 0,\, \ldots),$$

amint az teljes indukeióval nyilvánvalóan adódik.

Ezek után egy tetszés szerinti A polinomot először is végtelen összegre bonthatunk, amelyben a k-indexű polinom k-indexű egytthatója a_k, a többi együtthatója 0:

$$A = (a_0,\, 0,\, 0,\, \ldots) + (0,\, a_1,\, 0,\, \ldots) + \ldots + (\underbrace{0,\, \ldots,\, 0}_{n \text{ darab}},\, a_n,\, 0,\, \ldots) + \ldots.$$

Ennek a végtelen összegnek van értelme, mert a (3) feltételek teljesülnek, pl. $k_m = m + 1 \quad (m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$ választással. Az összeg (6) és (7) alapján így alakítható tovább:

$$A = a_0(1,\, 0,\, 0,\, \ldots) + a_1(0,\, 1,\, 0,\, \ldots) + \ldots + a_n(0,\, \ldots,\, 0,\, 1,\, 0,\, \ldots) + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1(0,\, 1,\, 0,\, \ldots) + a_2(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)^2 + \ldots + a_n(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)^n + \ldots$$

Ha még a $(0,\, 1,\, 0,\, \ldots)$ polinomot egy betűvel jelöljük, mondjuk x-szel, akkor ezzel vissza is nyertük az eredeti alakot

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

és itt a műveletek nemcsak formális jelek, hanem a fent definiált polinom–öszszeadást (végtelen összeget), polinom–szorzást, ill. polinom–hatványozást jelölnek, x azt a polinomot, amelynek egyetlen 0-tól különböző együtthatója az 1 indexű, és az 1, az a_v-k pedig ha tetszik, számokat, ha tetszik, olyan polinomokat jelölnek, amelyeknek 0 indexű együtthatója a_v, a többi 0.

Mielőtt továbbmennénk, egy pontatlanságot helyre kell igazítanunk. A polinomok együtthatóiról eddig csak annyit mondtunk, hogy számok, nem tisztázva, hogy milyen számkörre gondolunk, pedig sok érdekes különbség merül fel pl. az egész és a racionális együtthatós polinomok között. A valós együtthatós polinomok megint mutatnak az előbbiekétől lényegesen eltérő tulajdonságokat. Ugyancsak beszélhetünk (azoknak, akik megismerkedtek a komplex számokkal is) a komplex együtthatós polinomokról és sok más módon korlátozhatnánk még, hogy milyen számokat engedünk meg együtthatóknak.

A továbbiakban tehát gondoljuk rögzítettnek, hogy milyen számokat engedünk meg együtthatóknak. Gondoljunk a racionális együtthatós vagy a valós együtthatós vagy a komplex együtthatósakra. Az nem lesz lényeges, hogy melyiket választjuk, csak az, hogy az együtthatók körében korlátozás nélkül elvégezhető az összeadás, a kivonás, a szorzás és (a 0-val való osztás kivételével) az osztás is.

Hátra van még a kivonás és osztás kérdése. Ez részletesebben a következő kérdéseket jelenti: van-e adott A, B polinomhoz olyan U, ill. V polinom, ill. milyen feltételek közt van, amelyre

(7) $A = B + U$ ill. (8) $A = B \cdot V$,

és ha van, meg van-e egyértelműen határozva.

[6] C°-nak célszerűbb nem tulajdonítani értelmet csak úgy,mint 0°-nak sem a számok, körében.

Az első esetben, ha U-t $u_0 + u_1x + \ldots + u_nx^n + \ldots$ alakban írjuk, az $a_n = b_n + u_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ végtelen egyenletrendszerhez jutunk. Ez egyértelműen megoldható:

$$u_n = a_n - b_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Így a (7) egyenlet megoldása az

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots$$

polinom. Ezt fogjuk $A - B$-vel jelölni és az A és B különbségének nevezni. Speciálisan az $O - B$ polinomot jelöljük $-B$-vel is, és B negatívjának nevezzük. Ekkor $A - B = A + (-B)$, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy nem szükséges a műveletjelet és az előjelet megkülönböztetni (B levonása és $-B$ hozzáadása közt különbséget tenni).

A (8) egyenlet egy kicsit több óvatosságot igényel. Ez $V = v_0 + v_1x + \ldots + +v_nx^n + \ldots$ együtthatóira a következő egyenletrendszert adja

$$a_0 = b_0v_0, \qquad a_1 = b_0v_1 + b_1v_0, \ldots, a_n = b_0v_nb_0v_{n-1} + \ldots + b_nv_0, \ldots$$

Ez már nem mindig oldható meg, pl. ha az összes b_n nulla (B a O polinom), de $A \neq O$, akkor nem oldható pedig, ha pedig $A = B = O$, akkor nem egyértelmű a megoldás, annyira nem, hogy V akármilyen polinom lehet.

Nem volna nehéz az összes olyan eseteket jellemezni, amikor az egyenletrendszer megoldható, azonban szükségünk csak arra az esetre lesz, ha b_0 nem 0, így ezt feltesszük a továbbiakban. (Az általános eset is könnyen visszavezethető erre.)

Ez esetben egyenleteinket így írhatjuk:

$$v_0 = \frac{a_0}{b_0} \quad v_n = \frac{a_n}{b_0} - \frac{b_n}{b_0}v_0 - \frac{b_{n-1}}{b_0}v_1 - \ldots - \frac{b_1}{b_0}v_{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ez rekurzív egyenletrendszer a v együtthatók meghatározására, amelyből sorra minden együttható egyértelműen meghatározható. Eszerint olyan polinommal, amelyiknek a konstans tagja nem 0, az osztás is mindig egyértelműen elvégezhető, ismét polinomot eredményez. A hányadost itt is A/B-vel jelöljük, amint eddig is tettük.

Polinomok körében is szabad törteket egyszerűsíteni vagy bővíteni O-tól különböző polinommal. Ez az osztás értelmezése alapján azt jelenti, hogy ha

$$A = B \cdot V \quad \text{és} \quad CA = CB \cdot V_1,$$

ahol $B \neq O$ és $C \neq O$, akkor $V = V_1$.

A második egyenlőségből következik $A = B \cdot V_1$. Általában, ha $C \neq O$ és a D_1, D_2, polinomokra fennáll

$$CD_1 = CD_2, \quad \text{akkor} \quad D_1 = D_2.$$

Valóban, az első egyenlőség írható így:

$$C \cdot (D_1 - D_2) = 0.$$

Viszont végtelen összeg disztributivitásával kapcsolatban beláttuk, hogy ha két polinom egyike sem az O polinom, akkor szorzatuk sem az. Ha ugyanis az egyikben az i indexű együttható az első, amelyik nem 0, a másikban a j indexű, akkor a szorzatban az $i + j$ indexű együttható e két együttható szorzata, tehát szintén nem 0. Így a

$$CA = C \cdot B \cdot V_1,$$

egyenlőségből következik

$$A = B \cdot V_1.$$

Ezt összehasonlítva az $A = B \cdot V$ összefüggéssel, nyerjük, hogy

$$B \cdot V = B \cdot V_1.$$

Ebből viszont $B \neq O$ miatt

$$V = V_1$$

következik, vagyis

$$\frac{A}{B} = \frac{C \cdot A}{C \cdot B},$$

és ezt akartuk belátni.

Eredményeinket összefoglalva (végtelen) polinomok közt értelmeztünk műveleteket, megadva, hogyan határozhatók meg a művelet eredményének együtthatói. Ilyen műveletek az összeadás, a végtelen összeg (a tagokra tett bizonyos megszorítások mellett), a szorzás és hatványozás. Beláttunk ezek közt fennálló bizonyos azonosságokat, mindig abban az értelemben, hogy a két oldalon álló polinom azonos indexű együtthatói egyenlők. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy ha egy polinomot a szóban forgó átalakításokkal át tudunk alakítani egy másik polinommá, akkor a két polinom megfelelő együtthatói egyenlők. Ha tehát ilyen együttható– összehasonlítással nyerünk egy összefüggést, annak érvényességét ezzel bebizonyítottuk. Így helyes például minden n-re az I. részben a Fibonacci–számokra nyert mind a két explicit előállítás.

*

A továbbiakban néhány alkalmazást mutatok még. Nézzük a következő feladatokat.

Négy gyereknek megengedték, hogy almát szedjenek a fáról. 17-et szedtek le összesen. Hányféleképpen jöhetett ez létre?

Egy kiállítás belépődíja felnőtteknek 4 Ft, tanulóknak 1 Ft, honvédeknek 2 Ft. Az első órában 30 Ft gyűlt össze. Hányféle lehetett az első óra látogatóinak összetétele?

Az első feladatban, ha az első, második, harmadik, negyedik gyerek rendre a_1, a_2, a_3, a_4 almát szedett, akkor

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17.$$

Itt az a_i számok egészek és nem lehetnek negatívok. Bármelyik lehet 0, hiszen nem biztos, hogy mindenkinek volt egyáltalán kedve fára mászni. Ha Éva 7, Ádám 5, Dávid 3, Judit pedig 2 almát szedett, ez más lehetőség, mintha a gyerekek ugyanebben a sorrendben véve 2, 5, 7, ill. 3 almát szedtek. A feladat tehát így fogalmazható: hányféleképpen lehet a 17-et 4 nem–negatív egész szám összegeként írni, ha ugyanazok az összeadandók más sorrendben véve már más felírásnak számítanak?

A második feladatban jelöljük a felnőttek, gyerekek és honvédek számát f, q, h-val. Ekkor a

$$4f + g + 2h = 30$$

egyenlet megoldásainak a számát kérdezzük. Itt f, g, h ismét nem–negatív egészek, hiszen lehet, hogy akár egyik, akár másik, akár harmadikféle látogató nem járt a kiállításon a mondott időszakban.

A feladatok megoldása elvi nehézséget nem okoz, hiszen akár fel lehet sorolni az összes megoldásokat is, miután csak véges sok lehetőségről van szó, még ha ez hosszadalmas és végtelenül unalmas is lenne. Miután a megoldásokat nem kérdezik tőlünk, csak a számukat, lehetséges ügyesebb összeszámolás is. Az első esetben például azt mondhatjuk, hogy $a_1 + a_2$ valamilyen, 17-nél nem nagyobb k szám, $a_3 + a_4$ pedig $17 - k$. Az első úgy jöhet létre, hogy a_1 valamilyen egész 0-tól k-ig, a_2 pedig ezt k-ra egészíti ki. Ez $k + 1$ lehetőség, a második pedig hasonlóan számolva $17 - k + 1$ féle módon állhat elő, ami együtt $(k + 1)\,(18 - k)$ lehetőséget ad. Az összes megoldások száma pedig

$$1 \cdot 18 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 16 + \ldots + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 1 = 1140.$$

Ugyanezzel a gondolattal általában az

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n$$

egyenlet megoldásai számára a következő adódik:

$$1 \cdot (n + 1) + 2 \cdot n + 3 \cdot (n - 1) + \ldots + (n - 1) \cdot 3 + n \cdot 2 + (n + 1) \cdot 1.$$

A második feladatra is könnyen kiszámítható, hogy 72 különböző megoldása van. Adható azonban olyan eljárás, amelyik igen sok hasonló jellegű feladatra alkalmazható. Ennek a lényege a második feladat esetében látszik világosabban. Itt is keressük általában a

$$g + 2h + 4f = n$$

egyenlet megoldásainak a számát. Jelöljük ezt $t(n)$-nel. Az n forinthoz a gyerekek befizetésének a járuléka lehet

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \ldots$$

forint, a honvédekének a járuléka

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2k,\ \ldots,$$

a felnőtteké pedig

$$0,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 4k,\ \ldots.$$

Ahányféleképpen kiválaszthatunk az első, a második és a harmadik sorból egy–egy számot úgy, hogy azok összege n legyen, az adja meg $t(n)$-et.

Tekintsük most ezeknek a soroknak a tagjait kitevőknek egy–egy (végtelen) polinomban, amelyben mindegyik tag együtthatója $+1$, vagyis vegyük a következő polinomokat:

$$\begin{aligned} &1 + x\ \ + x^2 + \ldots + x^k\ + \ldots, \\ &1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots, \\ &1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{4k} + \ldots. \end{aligned}$$

Ha mindegyikből választunk egy–egy tagot úgy, hogy azok kitevőinek összege n legyen, ez azt jelenti, hogy a kiválasztott tagok szorzata x^n és ha minden lehetséges módon elkészítjük az ilyen kiválasztásokat, akkor éppen az összes olyan tagokat kaptuk meg, amelyek a három polinom szorzatában x^n-t adnak. Ezek száma lesz tehát x^n együtthatója a három polinom szorzatában. De ez a szám éppen $t(n)$, ezzel azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots)\cdot(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}+\ldots)\cdot(1+x^4+x^8+\ldots+\\ &+x^{4k}+\ldots)=1+t(1)\cdot x+t(2)\cdot x^2+\ldots+t(n)\cdot x^n+\ldots\end{aligned} \tag{9}$$

Eszerint $t(n)$-t egyszerre minden n-re meghatároztuk, ha sikerül a bal oldali szorzat polinom alakját valamilyen áttekinthető alakban előállítani. Egészen hasonlóan járhatunk el az

$$a_1+a_2+a_3+a_4=n$$

egyenlet megoldásai számának a meghatározásában is. Most mindegyik ismeretlen értékét a

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \ldots$$

sorozatból kell választani úgy, hogy az összegük n-et adjon. Áttérve polinomokra, az

$$1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots$$

polinomból kell 4 tagot kiválasztani úgy, hogy a kitevők összege n legyen. Mivel még arra is tekintettel kell lennünk, hogy milyen sorrendben választottuk ki a tagokat, világosabb úgy képzelni el a dolgot, hogy a polinomot négyszer írjuk le egymás alá és mindegyikből választunk egy–egy tagot minden lehető módon úgy, hogy a kitevők összege n legyen. Így ismét x^n együtthatóját kapjuk a 4 polinom szorzatában. A négy polinom szorzata azonban most a felírt polinom negyedik hatványa lesz. Így azt kaptuk –, a keresett megoldásszámot most $s(n)$-nel jelölve –, hogy

$$(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots)^4=1+s(1)\cdot x+s(2)\cdot x^2+\ldots+s(n)\cdot x^n+\ldots \tag{10}$$

A feladat tehát ismét az, hogy a bal oldalt írjuk polinom alakban úgy, hogy az együtthatóit n ismeretében ki tudjuk számítani.

Az alapot képező polinommal találkoztunk már PI-ben, láttuk, hogy

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots. \tag{11}$$

Így (10) bal oldalát írhatjuk $1/(1-x)^4$ alakban. A (9) bal oldalán szereplő második és harmadik tényezőt pedig megkaphatjuk (11)-ből, ha x helyébe x^2-et, ill., x^4-t teszünk. Így (9) bal oldala

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}$$

alakra hozható. Nekünk azonban ezeknek a tört alakoknak a polinom alakjára van szükségünk. Ehhez emlékezzünk vissza arra is, hogy PI-ben beláttuk a következő összefüggést:

$$\frac{1}{1-x^k}=1+\binom{k}{k-1}x+\binom{k+1}{k-1}x^2+\ldots+\binom{k+n-1}{k-1}x^n+\ldots \tag{12}$$

Így az első feladatot meg tudjuk már oldani általánosan:

$$1+t(1)x+\ldots+t(n)x^n+\ldots=\frac{1}{(1-x)^4}=1+\binom{4}{3}x+\binom{5}{3}x^2+\ldots+\binom{n+3}{3}x^n+\ldots,$$

tehát $\quad t(n)=\binom{n+3}{3}, \qquad t(17)=\binom{20}{3}=1140,$

amint azt más úton is meghatároztuk már.[7]

Újabb gondolatra van szükségünk (9) bal oldalának, tehát az

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}$$

kifejezésnek polinommá alakításához. Először is a nevezőt tovább alakítjuk lehetőleg alacsony fokú tényezők szorzatává:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2).$$

[7]Egyben általában nyertük a következő összefüggést is: $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\binom{n+3}{3}$.

Ennek a reciprok értéke most ún. parciális törtekre bontható, vagyis a következő alakú összegként írható:[8].

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{a_1}{1-x} + \frac{a_2}{(1-x)^2} + \frac{a_3}{(1-x)^3} + \frac{b_1}{1+x} + \frac{b_2}{(1+x)^2} + \frac{c_1x+c_2}{1+x^2}.$$

Itt a nevezők eltávolítása után nem nehéz az a_i, b_i, c_i együtthatókat kiszámítani és azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2)} =$$
$$= \frac{1}{32}\left\{\frac{9}{1-x} + \frac{8}{(1-x)^2} + \frac{4}{(1-x)^3} + \frac{5}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{4(1+x)}{1+x^2}\right\}.$$

A zárójel egyes tagjait már polinommá tudjuk alakítani (11) és (12) alapján, a negyedik és ötödik tagnál x helyébe $-x$-et, a hatodiknál $-x^2$-et írva. Az első öt tört polinom alakjában az n-edfokú tag együtthatója sorra

$$9, \quad 8(n+1), \quad 2(n+2)(n+1), \quad 5(-1)^n, \quad 2(-1)^n(n+1)$$

lesz. Az utolsó tört polinom alakjában két–két egymás utáni tag együtthatója felváltva 4, ill. -4. Ezt úgy írhatjuk, hogy az n-edfokú tag együtthatója $4(-1)^{[\frac{n}{2}]}$, ahol a szögletes zárójellel a benne levő szám egész részét jelöltük, azaz a legnagyobb egész számot, ami még nem nagyobb a zárójelben levő számnál.

Ezek alapján a keresett megoldásszám némi rendezés után a következő alakban írható:

$$s(n) = \frac{1}{32}\left\{2n^2 + 2\big(7+(-1)^n\big)n + 21 + 7(-1)^n + 4(-1)^{[\frac{n}{2}]}\right\}.$$

Ez pl. $n = 30$-ra 72-t ad, amit korábban is láttunk. (Ránézésre még az sem világos, hogy a zárójelben levő kifejezés minden n-re osztható 32-vel.)

Az eljárás általában használható pozitív egész együtthatós elsőfokú egyenletek megoldásszámának meghatározására nem–negatív egész számokban, bár a számolási nehézségek az együtthatók és a tagok számának a növekedésével rohamosan nőnek.

Láttuk a PI-ben a polinomok használhatóságát rekurzióval definiált mennyiségek közvetlen kiszámításánál. A cikk befejező részében erre mutatunk egy, a korábbiaknál bonyolultabb példát, amely el fog vezetni polinomok négyzetgyökéhez is.

---

[8]Komplex számokat is használva, csupa elsőfokú tényezőkig mehetett volna a tényezőkre bontás, és egységesebb alakú lenne a pareiális törtekre bontás is