Polinomok és végtelen polinomok

I. rész

Polinomokkal gyakran foglalkozunk a középiskolában, de majdnem kizárólag egyenletek megoldásával kapcsolatban. Sok másféle alkalmazásuk közül itt egy egészen elütő természetű alkalmazást fogok bemutatni.

Ismerjük a binomiális tételt. Eszerint

$$(x+1)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}.$$

Ebből kiindulva a hatványozás azonosságai binomiális együtthatók közti összefüggésekhez vezetnek el bennünket. Ha az

$$(x+1)^m(x+1)^n = (x+1)^{m+n},$$

továbbá az

$$\begin{gathered} x\big((x+1)^n + (x+1)^{n-1} + \ldots + (x+1) + 1\big) = \\ = \big((x+1)-1\big)\big((x+1)^n + (x+1)^{n-1} + \ldots + (x+1) + 1\big) = (x+1)^{n+1} - 1 \end{gathered}$$

azonosságok két oldalának tagokra bontott alakjában kiszámítjuk x^k, ill. az utóbbinál kényelem kedvéért x^{k+1} együtthatóját, ez arra vezet, hogy

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k},$$

ill.

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{1}$$

Az elsőnek speciális esete $m = 1$-re a jól ismert

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

összefüggés. Utóbbinak felhasználásával mindkét azonosság helyessége könnyen igazolható pl. n-re vonatkozó teljes indukcióval vagy található olyan kombinatorikai probléma, amelyet különböző meggondolásokkal oldva meg, a bal, ill. a jobb oldalt kapjuk eredményül.

Ugyancsak meglehetősen ismert és könnyen igazolható az

$$(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots(x^{2^{n-1}}+1) = x^{2^n-1} + x^{2^n-2} + \ldots + x + 1$$

azonosság. Itt a jobb oldalon x^k együtthatója 1, ha $0 \leqq k \leqq x^{2n} - 1$, a bal oldalon viszont minden egyes tag úgy keletkezik, hogy minden tényezőből kiválasztunk egy–egy tagot, ezeket összeszorozzuk és az így keletkező összes tagokat összeadjuk. Esetünkben az egyes tényezőkből vagy $1 = x^0$-t választhatunk vagy x-nek 2 valamelyik hatványára emelt hatványát. A minden tényezőből az 1 kiválasztásával keletkező 1-en kívül tehát x-nek olyan hatványai keletkeznek, amelyek kitevője a 2 alapszám különböző, n-ediknél alacsonyabb hatványainak összege. Azt kaptuk tehát, hogy minden 2^n-nél kisebb szám előállítható 2-nek különböző (n-ediknél alacsonyabb) hatványainak összegeként, és mindegyik csak egyféleképpen; más szóval *minden szám felírható éspedig csak egyféleképpen a 2-es alapú számrendszerben.* Ez természetesen egyszerűen belátható polinomok használata nélkül is.

Az olvasóra bízzuk, hogy állítsa elő, ha q, ill. q_1, q_2, ..., q_n az 1-nél nagyobb egészek, az

$$(1 + x + \ldots + x^{q-1})(1 + x^q + x^{2q} + \ldots + x^{(q-1)q})\ldots(1 + x^{q^{n-1}} + x^{2q^{n-1}} + \ldots + x^{(q-1)q^{n-1}}),$$

továbbá az

$$\begin{gathered} (1 + x + \ldots + x^{q_1-1})(1 + x^{q_1} + x^{2q_1} + \ldots + \\ + x^{(q_2-1)q_1})\ldots(1 + x^{q_1\cdots q_{n-1}} + x^{2q_1\cdots q_{n-1}} + \ldots + x^{q_1\cdots q_{n-1}(q_n-1)}) \end{gathered}$$

szorzat tagokra bontott alakját és fogalmazza meg az együttható–összehasonlítás szolgáltatta összefüggést.

Ezeknek az alkalmazásoknak a különlegessége abban áll, hogy itt x hatványainak alig volt szerepe. A polinomok együtthatói sorozata közt olvastunk le összefüggéseket és x hatványai csak mintegy ezen sorozatok elemeinek szétválasztására szolgáltak, de úgy, hogy mégis az egész sorozattal mint egyetlen egységgel számolhattunk.

Polinomjaink közt átalakításokat tudunk végezni: összeadjuk, szorozzuk, kivonjuk őket, ezúton újra polinomot kapunk, és az átalakításokkal nyert polinomok közti összefüggések elvezetnek a sorozatokra vonatkozó összefüggésekhez.

Az osztás már nem mindig végezhető el polinomok közt, nem mindig vezet újra polinomhoz. Bizonyára sokan tudják, hogy az egyváltozós polinomok körében végezhető azonban maradékos osztás, hasonlóan, mint az egész számok között.

Ha pl. $x^4+x^3+x^2+x+1$-et x^2-1-gyel akarjuk osztani, akkor először is keresünk egy olyan egytagú polinomot, amellyel x^2-1-et szorozva a legmagasabb fokú tag x^4 lesz és x^2-1-nek ezzel való szorzatát levonjuk az osztandóból. A szóban forgó szorzó x^2 és levonás után x^3+2x^2+x+1 marad. Ebből ismét levonjuk x^2-1-nek x-szeresét, és az eljárást addig folytatjuk, amíg a maradék másodnál alacsonyabb fokú nem lesz. Az adott esetben pl. azt kapjuk, hogy

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2-1)(x^2+x+2)+2x+3,$$

tehát x^2+x+2 az osztás hányadosa és $2x+3$ a maradék. Ez a maradék már alacsonyabb fokú, mint az osztó, s így az utóbbi nem szorozható olyan polinommal, hogy a szorzat legmagasabb fokú tagja $2x$ legyen.

Felmerül azonban az a gondolat, hogy ez a nehézség nem lép fel, ha x növekvő hatványai szerint haladva próbáljuk előállítani a hányadost. Adott példánkban először x^2-1-nek a (-1)-szeresét vonjuk le az osztandóból, majd az $x+2x^2+x^3+x^4$ polinomból az osztó $(-x)$-szeresét, majd a $(-2x^2)$-szeresét, a $(-2x^3)$-szorosát. Eddig jutva pl. azt kapjuk, hogy

$$1+x+x^2+x^3+x^4=(-1+x^2)(-1-x-2x^2-2x^3)+3x^4+2x^5.$$

Most nincs akadálya annak, hogy folytassuk az eljárást, és könnyű meggyőződni róla, hogy a további együtthatók felváltva (-3) és (-2) lesznek, azaz

$$\begin{aligned}1+x+x^2+x^3+x^4=(-1+x^2)(-1-x-2x^2-2x^3-3x^4-2x^5-3x^6-\\ -2x^7-3x^8\ldots).\end{aligned}$$

Mit értsünk azonban ezen; egyáltalán mit értsünk egy olyan polinomon, amiben x minden hatványa vagy általában végtelen sok hatványa fellép? Esetünkben a konstans és az elsőfokú tag (-1) együtthatóval szerepel, a másod- és harmadfokú tag (-2) együtthatóval, és minden magasabb páros fokú tag (-3) együtthatóval, a páratlan fokúak (-2) együtthatóval. Helyezkedjünk arra az álláspontra, hogy az osztás ilyen kifejezésre vezetett, tehát ezután számolunk ilyenekkel is, egyszerűen jelsorozatoknak fogjuk tekinteni ezeket és *végtelen polinom*oknak nevezzük őket.

Legyen

$$\begin{aligned}P&=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \text{ és}\\ Q&=d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_nx^n+\ldots\end{aligned}$$

két végtelen polinom, a c_i, d_i együtthatók tetszés szerinti számok, pl. valós számok. A végtelen polinomok között természetesen szerepelnek a közönséges (véges) polinomok is, ezek azok, amelyekben valahonnan kezdve minden együttható 0. Két jelsorozat, két végtelen polinom különböző, amint van x-nek olyan hatványa, amelyiknek a két végtelen polinomban különböző az együtthatója. Kézenfekvő, hogy végtelen polinomok összegén és szorzatán a következőt értsük:

$$\begin{aligned}P+Q&=(c_0+d_0)(c_1+d_1)x+(c_2+d_2)x^2+\ldots+(c_n+d_n)x^n+\ldots,\\ P\cdot Q&=(c_0d_0)+(c_0d_1+c_1d_0)x+(c_0d_2+c_1d_1+c_2d_0)x^2+\ldots+(c_0d_n+\\ &+c_1d_{n-1}+c_2d_{n-2}+\ldots+c_{n-2}d_2+c_{n-1}d_1+c_nd_0)x^n+\ldots\end{aligned}\tag{2}$$

Világos, hogy a műveletek ilyen értelmezése véges polinomokra helyesen adja meg azok összegét, ill. szorzatát. Azt is könnyű belátni, hogy a kivonás is mindig elvégezhető, az

$$R=(c_0-d_0)+(c_1-d_1)x+(c_2-d_2)x^2+\ldots+(c_n-d_n)x^n+\ldots$$

polinomra teljesül, hogy $P=Q+R$, és ez az egyetlen ilyen polinom, ez tehát a P és Q különbsége: a $P-Q$ polinom. Speciálisan a $-Q=-d_0-d_1x-d_2x^2-\ldots-d_nx^n-\ldots$ polinomot Q-hoz adva 0-t kapunk, azt a végtelen polinomot, amelyiknek minden együtthatója 0. Az utóbbi végtelen polinom hozzáadása bármelyik polinomhoz nem változtatja azt meg. A műveletek ilyen értelmezése mellett helyes lesz az

$$\begin{aligned}1+x+x^2+x^3+x^4=(-1+x^2)(-1-x-2x^2-2x^3-\\ -3x^4-2x^5-3x^6-\ldots-3x^{2n}-2x^{2n+1}-\ldots)\end{aligned}$$

egyenlőség is. A végtelen polinomok körében tehát az $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$ osztás is elvégezhető, ez a kifejezés is egy végtelen polinom más alakja egyszerűen, a jobb oldali második tényezőé.[1] Ezt a hányadost azonban másképp is átalakíthatjuk végtelen polinommá:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-1}&=\frac{(x+1)(x^3+x)+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^3+x}{x-1}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\\ &=\frac{x^3-1+(x-1)+2}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}((x+1)(x-1))}{(x+1)(x-1)}=x^2+x+2+\frac{\frac{5}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}.\end{aligned}$$

[1]Úgy látszik, mintha a végtelen polinomok körében az osztás is mindig elvégezhető volna. Az olvasóra bízzuk annak meggondolását, hogy ez az állítás helyes-e vagy sem. A következőket nem érinti az, hogy mi a kérdésre a pontos válasz.

Itt az utolsó két törtet a fentiek mintájára végtelen polinommá alakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{5}{2}}{x-1} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x^2 - \ldots - \frac{5}{2}x^n - \ldots;$$
$$\frac{\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2}x^n + \ldots$$

és ezek különbségét beírva a fenti egyenlőség jobb oldalába, így is a már talált hányadost kapjuk.

Megjegyezzük, hogy a fenti azonosság első és utolsó részét x^2-1-gyel szorozva viszont azt kapjuk, hogy

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+x+2)(x^2-1) + \frac{5}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) =$$
$$= (x^2+x+2)(x^2-1) + 2x + 3,$$

vagyis a (véges polinomok körében végezhető) maradékos osztás fentebb már megtalált eredményét. Ez nem is meglepő, hiszen egy végtelen polinom x (növekedő) hatványai szerint rendezett alakja egyértelműen meg van határozva.

A fenti két átalakítás a következőknek egy–egy számmal való szorzásából kapható:

(3)
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \text{ ill.}$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots.$$

Ezek közül is megkapható a másodikból az első, x helyébe $-x$-et írva (és fordítva is).

Szorozzunk most egy tetszés szerinti végtelen polinomot, pl. a fenti P-t $1/(1-x)$-szel:

$$P \cdot \frac{1}{1-x} = (c_0 + c_1x + \ldots c_nx^n + \ldots)(1 + x + \ldots + x^n + \ldots) =$$
$$= c_0 + (c_0+c_1)x + (c_0+c_1+c_2)x^2 + \ldots + (c_0+c_1+\ldots+c_n)x^n + \ldots.$$

Egy polinomnak $1/(1-x)$-szel való szorzatában tehát az n-ed fokú tag együtthatója az eredeti polinom együtthatóinak az összege a 0-d fokútól az n-ed fokú együtthatóig. Megpróbálhatjuk ennek segítségével levezetni pl. a kombinatorikából binomiális együtthatók összegére és váltakozó előjellel vett összegére vonatkozó ismert összefüggéseket. Az

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

összeget az $(1+x)^n/(1-x)$ polinom alakjából olvashatjuk le.

$$\frac{(1+x)^n}{1-x} = \binom{n}{0} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)x +$$
$$+\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)x^2 + \ldots + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}\right)x^n +$$
$$+\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}\right)x^{n+1} + \ldots + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}\right)x^{n+m} + \ldots$$

Másrészt így alakíthatjuk át a hányadost:

$$\frac{(1+x)^n}{1-x} = \frac{2^n - \big(2^n - (1+x)^n\big)}{1-x} = \frac{2^n}{1-x} -$$
$$-\frac{(1-x)\big(2^{n-1} + 2^{n-2}(1+x) + \ldots + 2(1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-1}\big)}{1-x} =$$
$$= 2^n(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) - \big(2^{n-1} + 2^{n-2}(1+x) + \ldots + 2(1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-1}\big).$$

Itt valóban az n-ed és magasabb fokú tagok együtthatója 2^n, vagyis

(4)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

amint azt más (tegyük hozzá, sokkal egyszerűbb) úton már beláttuk. Leolvashatunk azonban összefüggést az alacsonyabb fokú tagok együtthatóinak összehasonlításából is: ha $0 \leqq k \leqq n-1$, akkor

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}=2^n-\left(2^{n-k-1}\binom{k}{k}+\right.$$
$$\left.+2^{n-k-2}\binom{k+1}{k}+\ldots+2\binom{n-2}{k}+\binom{n-1}{k}\right).$$

Itt a jobb oldal első tagja helyébe (4) baloldalát írva és felhasználva a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát, eredményünket így is írhatjuk:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-k-1}=\binom{k}{k}2^{n-k-1}+\binom{k+1}{k}2^{n-k-2}+\ldots+\binom{n-2}{k}2+\binom{n-1}{k}.$$

Egy kicsit áttekinthetőbb alakot kapunk, ha $n-k-1$ helyett egy betűt, mondjuk l-et írunk és a jobb oldalon is használjuk a binomiális együtthatók szimmetriáját:

ha $0 \leqq l \leqq n-1$, akkor

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{l}=2^l+\binom{n-l}{1}2^{l-1}+\binom{n-l+1}{2}2^{l-2}+\ldots+\binom{n-2}{l-1}2+\binom{n-l}{1}.$$

Speciálisan $l=n-1$-re a bal oldalon (4) szerint 2^n-1 áll, a jobb oldalon viszont minden binomiális együttható 1 lesz, s így azt kapjuk, hogy

$$2^n-1=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1,$$

azaz a mértani sor összegképletét a 2 hányados esetére.

A binomiális együtthatók váltakozó előjelű összegére ugyanezzel a gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1-x}(1-x)^n=\binom{n}{0}+\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\right)x+\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\right)x^2+\ldots+$$
$$+\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\right)x^n+\ldots+\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\binom{n}{n}\right)x^{n+m}+\ldots$$

Másfelől azonban a bal oldalon most véges polinom áll:

$$(1-x)^{n-1}=1-\binom{n-1}{1}x+\binom{n-1}{2}x^2-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}x^{n-1}.$$

Így az n-ed és magasabb fokú tag együtthatója 0, azaz

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0,$$

és az alacsonyabb fokú együtthatókra az egyszerű összefüggés adódik itt:

ha $0 \leqq k \leqq n-1$, akkor

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

Ajánljuk az olvasónak, hogy bizonyítsa ezt be polinomok felhasználása nélkül is.

Megkaphatjuk ezúton a mértani sor összegképletét is. Arra az esetre szorítkozva, amikor az első tag 1, az $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$ összeget az

$$1+qx+q^2x^2+\ldots+q^nx^n+\ldots=\frac{1}{1-qx} \text{ és } \frac{1}{1-x}$$

szorzatában x^{n-1} együtthatója adja meg. A szorzatot, ha $q \neq 1$, így alakíthatjuk át:

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)}=\frac{1-qx-q(1-x)}{(1-x)(1-qx)}\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{q}{1-q}\cdot\frac{1}{1-qx}=$$
$$=\frac{1}{1-q}(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)-\frac{q}{1-q}(1+qx+q^2x^2+\ldots+q^nx^n+\ldots).$$

Így x^{n-1} együtthatója

$$\frac{1}{1-q}-\frac{q}{1-q}q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}.$$

Ha $q=1$, akkor az

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$$

összefüggésre jutunk, akár a sor összegét nézzük ebben az esetben, akár (3) jobb oldalát szorozzuk (2) szerint önmagával.

Szorozzuk most az utolsó végtelen polinomot újra $1/(1-x)$-szel, akkor a szorzatban x^n együtthatója $1+2+3+\ldots+(n+1)$ lesz, amit (1) speciális esetének tekinthetünk, ha n helyébe $n+1$-et, k helyébe pedig 1-et írunk. Így (3) jobb oldalát figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+\binom{4}{2}x^2+\ldots+\binom{n+2}{2}x^n+\ldots.$$

Hasonlóan menve tovább, ha ezt szorozzuk $1/(1-x)$-szel, x^n együtthatójának (1) bal oldala adódik, most n helyett $n+2$-vel és k helyett 2-vel. Ehelyett a jobb oldalát írva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^4}=1+\binom{4}{3}x+\binom{5}{3}x^2+\ldots+\binom{n+3}{3}x^n+\ldots$$

és általában

$$\frac{1}{(1-x)^k}=1+\binom{k}{k-1}x+\binom{1+k}{k-1}x^2+\ldots+\binom{n+k-1}{k-1}x^n+\ldots.$$

A végtelen polinomok sokféle alkalmazása közül még egyre mutatunk itt példát. Ismeretes a Fibonacci–féle sorozat, amelyiknek első két eleme 1, a továbbiak mindegyike pedig az őt megelőző kettőnek az összege. Kezdjük az elemek indexezését 0-val, akkor $u_0=u_1=1$ és ha $n\geqq 2$,

(5) $$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}.$$

Ez a rekurzív definíció módot ad a sorozat elemeinek egymás utáni meghatározására:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots$$

Jó volna azonban egy olyan eljárás, aminek segítségével u_n-et tetszés szerinti n-re meghatározhatjuk az előtte levők kiszámítása nélkül is. A feladatot fogalmazhatjuk úgy, hogy az

$$U=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots$$

végtelen polinom együtthatóit szeretnénk meghatározni. Erre a polinomra vonatkozóan könnyen nyerhetünk összefüggést az (5) egyenletből, ha azt x^n-nel megszorozzuk és $n=2,\ 3,\ 4,\ldots$-re összeadjuk:

$$\begin{aligned}u_2x^2+u_3x^3+\ldots+u_nx^n+\ldots=(u_1x^2+u_2x^3+\ldots+u_{n-1}x^n+\ldots)+\\+(u_0x^2+u_1x^3+\ldots+u_{n-2}x^n+\ldots).\end{aligned}$$

A jobb oldalon a második zárójelben x^2U van, az elsőben $u_0x=x$ híján xU, a bal oldal pedig $u_0+u_1x=1+x$ híján U. Így, ha mindkét oldalhoz $1+x$-et adunk, azt kapjuk, hogy

$$U=1+(x+x^2)U,\quad\text{vagyis}\quad U=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

Ezt végtelen polinommá alakíthatjuk pl. (3) alapján, ott x helyébe $x+x^2$-et írva:

$$U=\frac{1}{1-(x+x^2)}=1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+(x+x^2)^3+\ldots+(x+x^2)^n+\ldots.$$

Itt a k-adik hatványból akkor adódik n-ed fokú tag, ha $n/2\leqq k\leqq n$. Ekkor $(x+x^2)^k=x^k\cdot(1+x)^k$-nak n-ed fokú tagja

$$\binom{k}{n-k}x^n.$$

Itt k a legkisebb egésztől, ami nem kisebb $\dfrac{n}{2}$-nél, megy n-ig: Az előbbit írhatjuk $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ alakban, ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. Így $U(x)$ n-ed fokú tagjának az együtthatója

$$u_n=\binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{n-\left[\frac{n+1}{2}\right]}+\binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}{n-1-\left[\frac{n+1}{2}\right]}+\ldots+\binom{n}{0},$$

vagy, mivel könnyen látható, hogy $n - \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$,

$$u_n = \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]} + \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + \ldots + \binom{n}{0}.$$

Végtelen polinommá alakíthatjuk azonban U-t más módon is. A nevező gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, így az írható $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - x\right)$ alakban; célszerű lesz, hogy a konstans tag mindegyik tényezőben 1 legyen, az egyes tényezőket a megfelelő gyökkel elosztani, tehát a szorzatot $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1$-gyel. Mivel mindegyik gyök reciproka eszerint a másik negatívja, így

$$1 - x - x^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right)\left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right).$$

(Ennek helyességéről beszorzással könnyen meggyőződhetünk.) Ennek alapján U így alakítható át, ismét felhasználva (3)-at, x helyett $\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right)$-szel, ill. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$-szel:

$$U = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right)\left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right)}{\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x\right)\left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x} =$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 x^2 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 x^2 + \ldots + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n + \ldots\right).$$

Innen az n-ed fokú tag együtthatójára egy egész más alakot kapunk:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Első ránézésre legfeljebb annyi világos, hogy a kéttagúak hatványait tagokra bontva $\sqrt{5}$ páros hatványai a különbségből kiesnek, s így racionális számot ad a jobb oldal. A mondott átalakítást elvégezve a következőt kapjuk:

$$u_n = \left\{\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3}5 + \binom{n+1}{5}5^2 + \ldots + \binom{n+1}{2\left[\frac{n}{2}\right]+1} \cdot 5^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}/2^n.$$

Egy kis számolással ellenőrizhetjük, hogy mindegyik formulánk helyesen adja pl. a sorozat feljebb kiszámított elemeit.

Ez a néhány példa talán eléggé illusztrálhatja a végtelen polinomok használhatóságát. Feltünhetett azonban az olvasónak, hogy a nyert összefüggésekről sohasem állítottuk, hogy bebizonyítottuk őket. Vagy utaltunk polinomoktól független bizonyításra, vagy csak néhány esetben való kipróbálására utaltunk. Valóban, még véges polinomok esetén sem világos, miért hivatkozhatunk két polinom egyezéséből a megfelelő együtthatók megegyezésére. Hiszen két polinom megegyezésén azt értettük, hogy minden x értékre ugyanaz a két polinom helyettesítési értéke. De miért ne adhatnának különböző alakú kifejezések minden x-re egyenlő helyettesítési értéket? Hiszen trigonometrikus kifejezéseknél már bőséges tapasztalatunk van arról, hogy alakilag nagyon különböző kifejezések a bennük szereplő betűk minden értéke mellett megegyeznek, ha ezt néha nem is könnyű bizonyítani. Némi próbálgatással beláthatjuk például, hogy

$$\sin^6 x + \cos^6 x \quad \text{és} \quad 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

minden x-re ugyanazt az értéket veszi fel. Ennek még a magyarázatát sem nehéz megadni.

A cikk folytatásában tehát először is közelebbről megnézzük, mit is tudunk a végtelen polinomokról. Belátjuk, hogy levezetéseink szigorú bizonyítást adnak a nyert összefüggésekre; ezután további alkalmazásokat mutatunk.