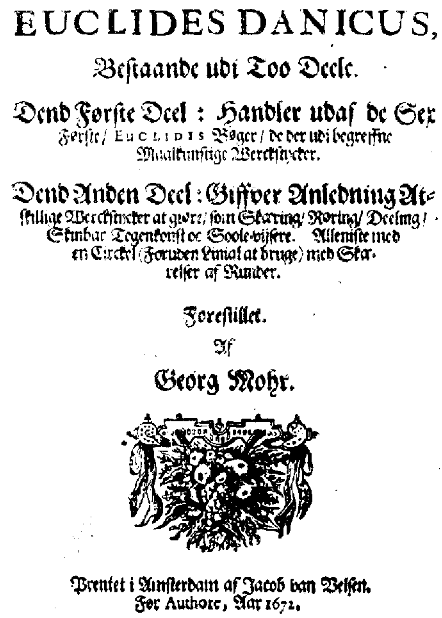
Mohr „Euclides Danicus”-a

A geometriai szerkesztések segédeszköze a vonalzó és a körző. A vonalzót két adott ponton átmenő egyenes húzására, a körzőt adott pont körül két adott pont távolságával egyenlő sugarú kör rajzolására használjuk. Szerkesztett pontoknak csak azokat a pontokat tekintjük, amelyeket az ilyen módon megrajzolt egyenesek és körök metszéspontjai szolgáltatnak. A már szerkesztett pontokat a további szerkesztésekben adottnak vesszük.

A körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztések tehát a következő háromféle alapszerkesztésből tehetők össze: 1. két egyenes, 2. egyenes és kör és 3. két kör metszéspontjainak szerkesztéséből.

A XVIII. század végén *Mascheroni*[1] megmutatta, hogy az összes mértani szerkesztések csupán körzővel is elvégezhetők.[2] Mascheroni érdekes fölfedezését „La geometria del compasso” című munkájában 1797-ben Páviában közölte. E dolgozat annak idején nagy feltűnést keltett és szerzője nevét a tudomány történetében emlékezetessé tette.

Csak sokkal később szerzett arról tudomást a matematikus világ, hogy *G. Mohr* dán matematikus már 125 évvel Mascheroni előtt ugyanerre az eredményre jutott „Euclides Danicus” című művében.


EUCLIDES DANICUS,
Bestaande udi Too Deele.
Dend Første Deel : Handler udaf de Sex Første / EUCLIDIS Bøger / de der udi begreffne Maalkunstige Werckstycker.
Dend Anden Deel : Giffver Anledning Atskillige Werckstycker at giøre / som Skæring / Røring / Deeling / Stinbar Tegenkonst oc Soole-vijsere. Allenniste med en Circkel (Foruden Linial at bruge) med Skærelser af Runder.
Forestillet.
Af
Georg Mohr.
Prentet i Amsterdam af Jacob van Velsen. For Authore, Aar 1672.

A könyv címlapja

Georg Mohr, vagy valódi nevén Mohrendal (Mohrenthal), 1640. április 1-én Koppenhágában született, hol atyja kereskedő volt és a kórház felügyelője. Ifjú korától fogva a matematika felé vonzódott. Mint 22 éves fiatal ember Angliába, Franciaországba és Hollandiába ment a matematikában alapos ismeretekre szert tenni, mely alkalommal számos tudóssal, pl. *Leibniz*cel és *Tschirnhaus*szal [3] is megismerkedett. Hosszabb ideig tartó távollét után hazájába visszatérvén, csakis tudományos kutatásainak élt. 1687-ben Hollandiába tette át tartózkodása helyét. Végül 1695-ben barátjának, *Tschirnhaus*nak unszolására Kieslingswaldeba költözött át, hogy tudományos tevékenységében segítségére legyen, ahol 1697. január 26-án meg is halt.

Mohr több művet írt, de kéziratai 1672-ben az akkori háborúkban nagyrészt elvesztek. Egyetlen műve maradt ránk, s ez a már fönt említett „Euclides Danicus”, mely éppen 300 évvel ezelőtt, 1672-ben jelent meg Amsterdamban dán és holland nyelven, anélkül azonban, hogy figyelmet keltett volna, mert az értekezés címe nem volt a legszerencsésebben választott, s emiatt azt hitték, hogy *Euklides* „Elemek” című művének kivonata vagy fordítása. A munka, bár puszta címe *Murhard* „Bibliotheca mathematica” (Lips. 1797–1805) című könyvészeti műve II. kötetében (a 36–37. lapon) a holland Euklides–fordítások között megtalálható, a tudományos irodalomban teljesen ismeretlen maradt. Csak 1928-ban terelődött rá a közfigyelem, midőn V. Beck, akkoriban egyetemi hallgató, egy koppenhágai könyvárusnál megtalálta a mű egy holland nyelvű példányát; *Johannes Hjelmslev* koppenhágai egyetemi tanár pedig, kinek a könyvet Beck megmutatta s ki azt nagy érdeklődéssel áttanulmányozta, ismertetést írt róla.

Mohr műve a koppenhágai akadémia kiadásában 1928-ban Koppenhágában újra megjelent eredeti dán nyelven, melyhez hazánkfia, *Pál Gyula* német fordítását csatolták.

[1] *Lorenzo Mascheroni,* 1750. május 14-én született Bergamo mellett Castagnettoban, meghalt 1800. július 30-án Párizsban; szerzetes volt és a bergamoi líceumon, később a páviai egyetemen matematikát tanított.

[2] Megjegyezzük, hogy az olyan feladatokat, amelyek egyenesek húzását kívánják, megoldottnak tekintjük, ha két pontját meg tudjuk az egyenesnek szerkeszteni.

[3] *Ehrenfried Walther von Tschirnhaus* gróf 1651. április 10-én született Görlitz mellett Kieslingswaldeban, meghalt 1708. október 11-én Drezdában. Az optikai műszerek javításával foglalkozott; vörösrézből óriási gyújtótükröt készített, mely a drezdai „matematikai szalon”-ban még ma is látható.

A szóban forgó munka első részében a szerző az *Euklides*–féle „Elemek” első hat könyvében előforduló összes szerkesztési feladatot csupán körzővel oldja meg; a második és egyszersmind utolsó részben a pusztán körző segítségével végrehajtott szerkesztések különféle alkalmazásait tárgyalja.

A következőkben ismertetni óhajtjuk a Mohr–féle szerkesztések közül azokat, amelyek segítségével a geometria összes szerkesztési feladatai megoldhatók. A feladatok a következők:

1. feladat. Határozzuk meg valamely AO távolság kétszeresét.

Megoldás: O körül AO sugárral kört rajzolunk, melynek kerületére az A pontból kiindulva háromszor rámérjük az AO sugarat mint húrt; az utolsó osztási pont a körnek A-val átellenes D pontja. Emiatt A, O és D egy egyenesben feküsznek és

$$AD = 2 \cdot AO.$$

Ezen eljárás többszöri alkalmazásával szerkeszthetünk olyan N pontot hogy

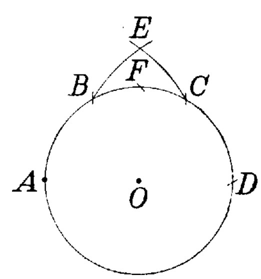
$$AN = n \cdot AB,$$

ahol n egész számot jelent.

2. feladat. Osszuk az adott kör kerületét négy egyenlő részre.

Megoldás: A kör tetszés szerinti A pontjából kiindulva az AO sugarat háromszor rámérjük úgy, hogy $AB = BC = CD = OA$-val.

Ezután A és D pontokból mint középpontokból $AC = BD$ sugárral köríveket rajzolunk; ezek metszéspontját E-vel jelöljük.



Ha most A pontból OE sugárral az adott kört F-ben átmetsszük, akkor AF a körbe írt szabályos négyszögnek egyik oldala lesz.

Bizonyítás: Minthogy az ACD derékszögű háromszögben $AD = 2 \cdot CD$, azért

$$\overline{AC^2} = 3 \cdot \overline{CD^2},$$

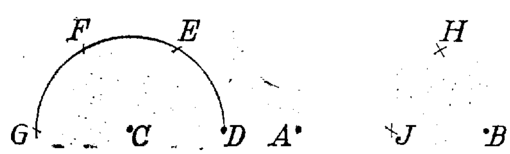
amiből következik, hogy az AOE derékszögű háromszögben

$$\overline{OE^2} = 2 \cdot \overline{AO^2},$$

vagyis OE a 90°-ú húrnak a hossza.

3. feladat. Adva van két távolság AB és CD oly módon, hogy $AB = 2 \cdot CD$; felezzük az AB távolságot.

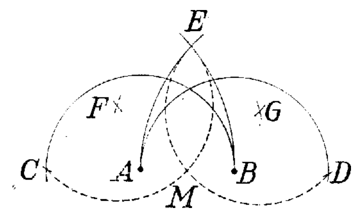
Megoldás: C pontból CD távolsággal félkört írunk le, melyre a sugarat háromszor rámérjük, úgy, hogy $DE = EF = FG = CD$.



Most A-ból GE körzőnyílással körívet rajzolunk és azt H-ban olyan körívvel metsszük át, melynek sugara DE, középpontja pedig B. Végre B-ből és H-ból CD körzőnyílással egymást metsző köríveket rajzolunk. Ha az így nyert pontok közül J azon pont, melynek A-tól való távolsága CD-vel egyenlő, akkor J az AB távolság felezőpontja.

4. feladat. Felezzük az AB távolságot.

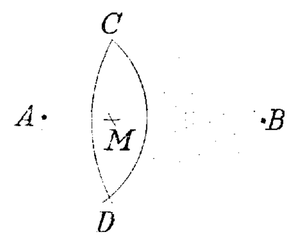
Megoldás: Mindenekelőtt meghatározzuk a C és D pontokat úgy, hogy azok AB-vel egy egyenesbe essenek és $CA = AB = BD$ legyen. Azután rajzoljunk C és D pontokból $BC = AD$ távolsággal köríveket; ezek metszéspontját E-vel jelöljük.



Most a CE és DE távolságot az előbb bemutatott szerkesztés szerint F-ben és G-ben felezzük. Ha végre F-ből és G-ből E ponton át köríveket rajzolunk, melyek egymást még M pontban metszik, akkor M-ben a keresett felezőpontot nyerjük.

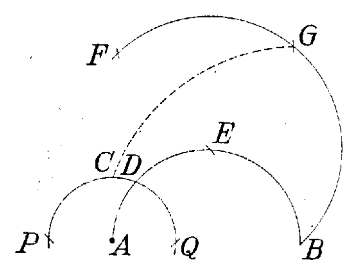
5. feladat. Ejtsünk valamely AB egyenesre kívüle fekvő C pontból merőleges egyenest és határozzuk meg ennek M talppontját.

Megoldás: A-ból és B-ből C ponton át köríveket rajzolunk, melyek még D-ben metszik egymást. Ha most a 4. feladat szerint felezzük a CD távolságot M-ben, akkor az M pont a C pontnál AB-re ejtett merőleges talppontja.



6. feladat. Emeljünk valamely AB egyenesre ennek A pontjában adott nagyságú AC merőlegest.

Megoldás: AB fölé a 4. alapján félkört rajzolunk és A-ból az adott távolsággal körívet írunk le, mely a félkört D-ben metszi (föltéve, hogy az adott távolság kisebb AB-nél). Ezután a 2. alapján felezzük a félkört E pontban.



Most E-ből mint középpontból BE sugárral körívet írunk le és meghatározzuk a B-vel átellenes F pontot. Ezek megtörténte után F pontból BD sugárral a BF fölé rajzolt félkört G-ben átmetsszük.

Ha végre B-ből BG sugárral az adott távolsággal A-ból rajzolt körívet C-ben átmetsszük, akkor AC a keresett merőleges.

Bizonyítás: Az ABD derékszögű háromszögben

$$\overline{BD^2} = \overline{AB^2} - \overline{AD^2},$$

az ABE egyenlő szárú derékszögű háromszögben

$$2 \cdot \overline{BE^2} = \overline{AB^2},$$

és a BFG derékszögű háromszögben

$$\overline{BG^2} = \overline{BF^2} - \overline{BG^2}.$$

Csakhogy $BF = 2 \cdot BE$ és $FG = BD$, tehát

$$\overline{BG^2} = \overline{AB^2} + \overline{AD^2}.$$

De az ABC háromszögben $BC = BG$ és $AC = AD$, amiből következik, hogy AC az AB-vel derékszöget képez.

Megjegyezzük, hogy ha az adott távolság nem volna kisebb AB-nél, vagyis nem lehetne az AB fölé rajzolt félkörre rávinni, akkor az AB távolság kétszeresét, háromszorosát, …, n-szeresét kell venni és a félkört e fölé kell rajzolni, hogy célt érjünk.

7. feladat. Az A és B pontjaival megadott egyenesre vigyük fel A-tól a megadott MN távolságot.

Megoldás: Mindenekelőtt meghatározzuk az előbb bemutatott szerkesztés segítségével a C pontot úgy, hogy AC az AB egyenesre merőlegesen álljon és MN-nel egyenlő legyen. Azután meghatározzuk a 2. feladat szerint az A-ból AC sugárral leírt körön a P és Q pontokat úgy, hogy azok AB-vel egy egyenesbe essenek. Akkor $AP = AQ = MN$.

8. feladat. Keressük három távolsághoz a negyedik arányost.

Megoldás: Legyenek az adott távolságok AB, CD, EF és keressük azt az MN távolságot, melyre nézve

$$AB : CD = EF : MN.$$

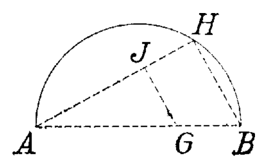
Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy

$$AB > EF,$$

mert $AB < EF$ esetében mindig vehetünk olyan n egész számot, hogy $n \cdot AB$ nagyobb legyen EF-nél, és akkor $n \cdot AB$-, $n \cdot CD$- és EF-hez keressük a negyedik arányost.

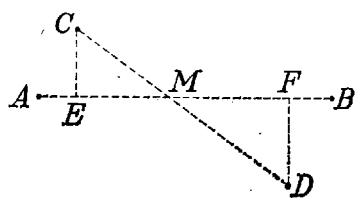
A szerkesztés menete a következő:

Az AB egyenesen meghatározzuk a G pontot úgy, hogy $AG = CD$ legyen. Ezután AB fölé félkört rajzolunk és A-ból EF sugárral H-ban átmetsszük. Végre meghatározzuk a G pontból AH-ra ejtett merőleges egyenes J talppontját. Akkor AJ távolság a keresett negyedik arányos lesz.



9. feladat. Keressük az A és B, illetőleg a C és D pontok által adott egyenesek metszéspontját.

Megoldás: Jelöljük a C és D pontokból AB-re bocsátott merőleges egyenesek talppontját E-vel és F-fel, és messe a CD egyenes AB-t az M-ben.



Ha C és D az AB egyenes különböző oldalain fekszenek, akkor

$$(CE + DF) : CE = EF : EM.$$

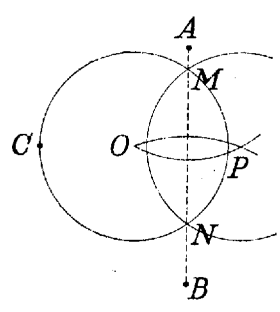
Ha pedig a C és D pont az AB egyenes ugyanazon oldalára esik, akkor

$$(CE - DF) : CE = EF : EM.$$

Ám CE, DF, EF ismertek, és így EM a 7. és 8. feladat alapján megszerkeszthető. Ha már most EM-et ismerjük, akkor az M pont helyzetét nyerjük, ha E-től az AB-re rávisszük az EM távolságot.

10. feladat. Határozzuk meg az A és B pontjaival megadott egyenes metszéspontjait az O középpontú és OC sugarú körrel.

Megoldás: *a)* O az AB egyenesen kívül van. A-ból és B-ből AO, ill. BO sugárral köríveket rajzolunk, melyek még P-ben metszik egymást. Most P-ből mint középpontból OC sugárral kört rajzolunk. A két kör M és N metszéspontjai az adott kör és az AB egyenes metszéspontjai.



b) O az AB egyenesen van. Ez esetben meghatározzuk az AB egyenesen az M és N pontokat úgy, hogy $OM = ON = OC$ legyen.

Látjuk tehát, hogy az 1. és 2. alapszerkesztés mindig visszavezethető a 3.-ra, mely körzővel közvetlenül elvégezhető. Ebből azonban következik, hogy minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés csupán körzővel is elvégezhető.