Gauss-féle binomiális együtthatók[1]

I. rész

A binomiális együtthatók szerepelnek a középiskolai tantervben, kapcsolatuk a kombinatorikával Leibniz, Pascal és Jacob Bernoulli kora óta jól ismert. Az ún. „Gauss–féle binomiális együtthatók" sokkal kevésbé közismertek, kapcsolatuk a kombinatorikával pedig új keletű. Ezért a Gauss–féle és a közönséges binomiális együtthatók néhány kapcsolatának megvilágítása bizonyára új színt ad egy hagyományos középiskolai anyagrésznek.

1. *Definíció: Gauss–féle binomiális együtthatónak* nevezzük az

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n-r+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\cdot\ldots\cdot(q^r-1)} \tag{1.1}$$

kifejezést, ahol n és r a $0 < r \leqq n$ feltételt kielégítő egészek, q változó, amely minden 1-től különböző értéket felvehet;[2] a definíciót kiegészítjük az $r = 0$ esetre és megemlítjük az $r = n$ speciális esetet:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1. \tag{1.2}$$

A $q = 1$ esetet ki kellett zárnunk, mert a nevező minden tényezője osztható $q-1$-gyel, de a számlálóé is. Ha viszont ezekkel a tényezőkkel egyszerűsítünk, azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1)(q^{n-2}+\ldots+1)\cdot\ldots\cdot(q^{n-r}+\ldots+1)}{1\cdot(q+1)\cdot(q^2+q+1)\cdot\ldots\cdot(q^{r-1}+\ldots+1)},$$

és ez tetszés szerint megközelíti az

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-r+1}{r} = \binom{n}{r} \tag{1.1*}$$

közönséges binomiális együtthatót, ha q elég közel van az 1-hez.

2. *A bimoniális tétel egy általánosítása.* Vezessük be az x változó következő polinomját:

$$f(x) = (1+x)(1+qx)\cdot\ldots\cdot(1+q^{n-1}x); \tag{2.1}$$

ennek a gyökei n elemű mértani sorozatot alkotnak q^{-1} hányadossal és -1 első elemmel. Tűzzük ki következő feladatunkul az

$$f(x) = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + \ldots + Q_nx^n \tag{2.2}$$

x hatványai szerint rendezett alak együtthatóinak meghatározását. Nyilvánvaló, hogy

$$Q_0 = 1, \quad Q_n = q^{n(n-1)/2}. \tag{2.3}$$

Feladatunk megoldásában segítségünkre lesz annak észrevétele, hogy (2.1)-ből azonnal következik az

$$(1+x)\cdot f(qx) = f(x)\cdot(1+q^nx) \tag{2.4}$$

összefüggés, vagy beírva ide (2.2)-t, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(1+x)(Q_0+Q_1qx+\ldots+Q_rq^rx^r+\ldots+Q_nq^nx^n) &= \\ = (1+q^nx)(Q_0+Q_1x+\ldots+Q_rx^r+\ldots Q_nx^n).\end{aligned} \tag{2.5}$$

A két oldalon x hatványainak az együtthatóit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$Q_rq^r + Q_{r-1}q^{r-1} = Q_r + q^nQ_{r-1} \tag{2.6}$$

vagy átrendezve

$$Q_r = Q_{r-1}\cdot\frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1}\cdot q^{r-1}, \tag{2.7}$$

ha $r = 1, 2, 3, \ldots, n$. (2.7) ismételt alkalmazása (2.3) és (1.1) figyelembevételével azt adja, hogy

$$Q_r = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-1)/2}. \tag{2.8}$$

---

[1] Megjelent az *Elemente der Mathematik* 26 (1971), 102–109. oldalán. Fordította a K.M.L. céljára kisebb módosításokkal *Surányi János.*

[2] Vö. *Carl Friedrich Gauss,* Summatio quarundam serierum singularium. Összegyűjtött művei 2. köt., főképp 16–17. o.

Így (2.1) és (2.2) alapján azt kapjuk, hogy

$$(2.9)\qquad (1+x)(1+qx)\cdot\ldots\cdot(1+q^{n-1}x)=$$
$$=\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}x+\ldots+\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}q^{r(r-1)/2}x^r+\ldots+\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}q^{n(n-1)/2}x^n,$$

és ha q az 1-hez közeledik, határesetként az

$$(2.9^*)\qquad (1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

binomiális tételt, kapjuk.

3. *Rekurziós formula.* (2.9) bal oldalából az n helyett $n+1$-hez tartozó megfelelő kifejezést úgy kapjuk, hogy $(1+q^nx)$-szel szorzunk. A jobb oldalakból a kétféle átalakítással az

$$(1+q^nx)\left(\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}x+\ldots+\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}q^{r(r-1)/2}x^r+\ldots+\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}q^{n(n-1)/2}x^n\right)=$$
$$=\begin{bmatrix}n+1\\0\end{bmatrix}+\ldots+\begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}q^{r(r-1)/2}x^r+\ldots+\begin{bmatrix}n+1\\n+1\end{bmatrix}q^{(n+1)n/2}x^{n+1}$$

összefüggést kapjuk, és a két oldalon x egyenlő hatványainak az együtthatóit összehasonlítva azt nyerjük, hogy

$$(3.1)\qquad \begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}q^{n-r+1},\quad r=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Ez az eredmény könnyen nyerhető közvetlenül az (1.1) definícióból is és a közönséges binomiális együtthatókra vonatkozó

$$(3.1^*)\qquad \binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

összefüggésnek felel meg.

Az (1.2) „kezdeti feltételek"-ből kiindulva és sorra áttérve a (3.1) rekurziós formula alapján egy–egy n értékről a rákövetkezőre, könnyen kiszámíthatjuk a Gauss–féle binomiális együtthatókat. Eközben csak összeadást és szorzást kell ismételten végezni, kivonást és osztást soha. Ezzel azt derítettük ki $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$-ről, ami az (1.1) definíció alapján q racionális törtfüggvényének látszik, hogy q-nak egy

$$(3.2)\qquad \begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=A_{n,r,0}+A_{n,r,1}q+\ldots+A_{n,r,(n-r)}q^{r(n-r)}$$

alakú polinomja, és az $A_{n,r,\alpha}$ együtthatók pozitív egész számok. (A közönséges binomiális együtthatók is az (1.1^*) definíció alapján eredetileg racionális számnak látszanak, de kiderül róluk, pl. (2.9^*)-ból, hogy egész számok.) Az, hogy a (3.2) jobb oldalán álló polinom fokszáma $r(n-r)$, adódik pl. az (1.1) jobb oldalán álló kifejezés számlálójában és nevezőjében álló polinomok fokszámának különbségéből, vagy igazolható teljes indukcióval.

E dolgozat fő célja az $A_{n,r,\alpha}$ együtthatók egy szemléletes tulajdonságának a kifejtése.

4. *Egy kombinatorikus értelmezés.* Tekintsünk a síkban egy derékszögű koordináta-rendszert. Azokat a pontokat, amelyeknek mind a két koordinátája egész szám, rácspontoknak szokás nevezni. Gondoljuk ezeket *utcasarok*nak, és az utcasarkokon át a tengelyekkel párhuzamosan futó egyeneseket *utcá*nak. Képzeljünk egy ebben az úthálózatban sétáló gyalogost (mozgó anyagi pontot). Ebben az úthálózatban egy a (0, 0) és az $((r, n-r)$ sarok közt futó legrövidebb utat (feltesszük, hogy $0\leqq r\leqq n$) zegzugos útnak fogunk nevezni; az ilyenek hossza n. Ismeretes,[3] hogy a zegzugos utak száma $\binom{n}{r}$. Ezt a következővel fogjuk kiegészíteni:

Tétel: Az olyan zegzugos utak száma, amelyek alatt α nagyságú terület van, $A_{n,r,\alpha}$.[4]

Az „út alatti terület"-et az út, a vízszintes $y=0$ tengely és a függőleges tengellyel párhuzamos $x=r$ egyenes zárja körül.

Az 1. ábra az $n=6$, $r=2$ speciális esetet szemlélteti.

A binomiális együtthatókra vonatkozó állítás szinte csak átfogalmazása a (3.1^*) rekurziós egyenlőségnek. A (2, 4) sarokra vagy a (2, 3) vagy az (1, 4) sarokról érkezhetünk zegzugos úton, így az előbbi sarokra vezető utak száma az

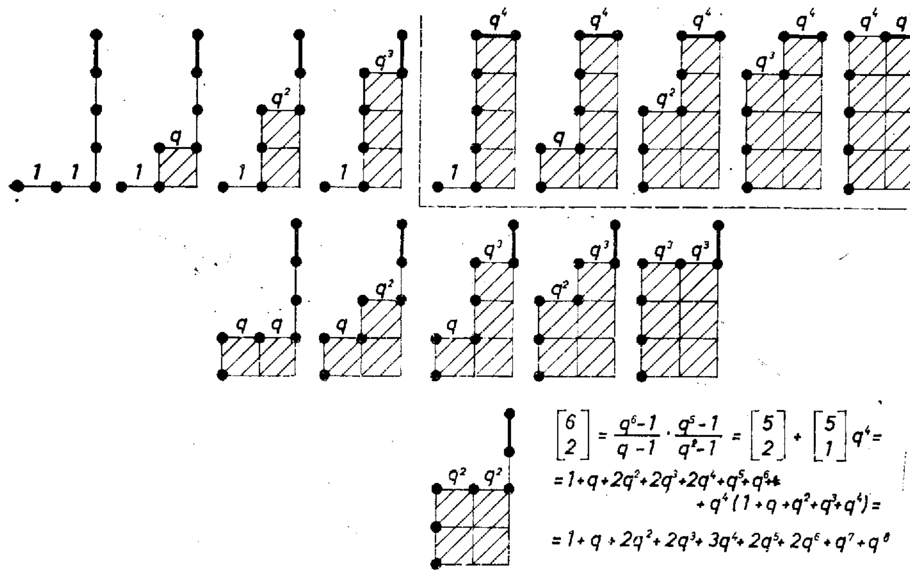
[3]Lásd pl. *Pólya György:* A problémamegoldás iskolája I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967. 81–86. old.

[4]*G. Pólya,* Journ. of Combinatorial Theory 6 (1969) 102–105. old., különösen 105. old.

utóbbi kettőre vezető utak számának az összege. Miután még a függőleges és a vízszintes tengelyen levő $(0, n)$ és $(n, 0)$ sarkok mindegyikére csak egy–egy zegzugos út vezet, összhangban az

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

„peremfeltételekkel”, így az egy–egy sarokra vezető zegzugos utak száma ugyanazokat a feltételeket elégíti ki, mint a megfelelő binomiális együttható. A kettő tehát megegyezik.



1. ábra

Egész hasonlóan értelmezhetjük a (3.1) rekurziós formulát is. Most minden zegzugos úthoz q egy hatványát fogjuk hozzárendelni, és az egy sarokra vezető utakhoz rendelt tagok összege lesz a megfelelő Gauss–binomiális együttható. A (2, 4) sarokra vezető 6 hosszúságú zegzugos utakat tekintsük két részből: a (0, 0) sarokról induló 5 egységnyi hosszúságú *kezdő rész*ből és a (2, 4) sarokra érkező 1 hosszúságú *záró szakasz*ból állónak.

A (3.1)-ből esetünkben adódó

$$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \cdot q^4$$

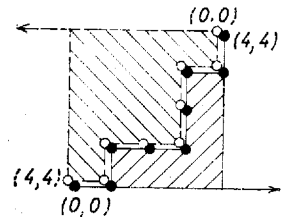
összefüggés jobb oldalának első tagja képviseli a (2, 3) sarokról érkező $\binom{5}{2} = 10$ zegzugos út adalékát, tehát azokét, amelyeknek a záró szakasza függőleges, a második tag pedig az (1, 4) sarokról érkező, tehát vízszintes zárószakasszal rendelkező $\binom{5}{1} = 5$ zegzugos út adalékát. Az előbbi zegzugos utakhoz q-nak ugyanazt a hatványát fogjuk rendelni, mint a kezdő részükhöz, az utóbbiakhoz pedig a kezdő részükhöz rendelt hatvány q^4-szeresét, vagyis 4-gyel magasabb hatványt.

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a függőleges útszakaszokhoz 1-et rendelünk hozzá, a 4 magasságban futó egységnyi hosszúságú vízszintes szakaszhoz pedig q^4-t. Általában minden h magasságban futó egységnyi hosszúságú vízszintes útszakaszhoz q^h-t rendelünk, speciálisan a vízszintes tengelyen levő szakaszokhoz $q^0 = 1$-et. Egy zegzugos úthoz ezután az egységnyi szakaszaihoz rendelt értékek szorzatát rendeljük. Így a függőleges és a vízszintes tengelyeken levő $(0, n)$ és $(n, 0)$ sarkokra vezető egyetlen zegzugos út minden szakaszához 1-et rendeltünk, tehát az egész úthoz is. Ez összhangban van az (1.2) peremfeltétellel. A q hatványainak a vízszintes és függőleges szakaszokhoz történt hozzárendelése is általában összhangban van (3.1)-gyel, mert a jobb oldal első tagja az $(r, n-r)$ sarokról, a második pedig az $(r-1, n-r+1)$ sarokról az $(r, n-r+1)$ sarokra érkező utak adalékát tartalmazza. Az 1. ábrán feltüntettük a vízszintes szakaszokhoz rendelt értékeket. Az elmondottakat jól követhetjük az ábra alapján.

Ezzel tehát beláttuk, hogy az $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$ Gauss–binomiális együttható a (0, 0) sarokról az $(r, n-r)$ sarokra vezető zegzugos utakhoz tartozó q-hatványok összege; ennek a hatványnak a kitevője az út vízszintes szakaszaihoz rendelt hatványok kitevőinek összege.

Az egyes szakaszokhoz rendelt kitevő viszont azt mutatja, hogy a szakasz hány egység magasságban van, vagy még másképp fogalmazva: hány egységnyi oldalú négyzet helyezhető el a szakasz és a vízszintes tengely közt. Az egész úthoz rendelt kitevő tehát az út vízszintes szakaszai alatt levő területek összegével, vagyis az egész zegzugos út alatti területtel egyezik meg. Így valóban q^α együtthatója az olyan zegzugos utak száma, amelyek alatt α terület van, és éppen ezt állítja tételünk.

Tanulságos lesz közvetlenül igazolni néhány olyan összefüggést, ami szoros kapcsolatban van az éppen látott tétellel.



2. ábra

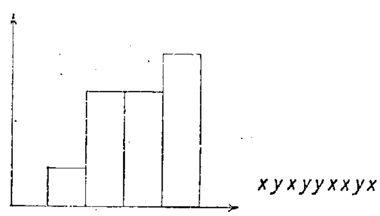
Akár a 2. ábrából, akár az (1.1) kifejezésből világos (ábra a 102. oldalon), hogy

$$A_{n,r,\alpha} = A_{n,r,r(n-r)-\alpha}. \tag{4.1}$$

Mivel továbbá $q = 1$-nél (1.3) szerint a Gauss–féle binomiális együttható a megfelelő közönséges binomiális együtthatót adja, így (3.2) azt szolgáltatja, hogy

$$A_{n,r,0} + A_{n,r,1} + \ldots + A_{n,r,(n-r)} = \binom{n}{r}. \tag{4.2}$$

5. *Egy további kombinatorikus értelmezés.* Egy zegzugos út egymáshoz csatlakozó egységnyi szakaszokból áll, amelyek szomszédos utcasarkokat kötnek össze. Ezeket a szakaszokat a $(0, 0)$ pontból indulva sorra x-szel vagy y-nal fogjuk megjelölni aszerint, hogy melyik melyik koordináta–tengellyel párhuzamos. Ezzel egyértelműen egymáshoz rendeltük a zegzugos utakat és betűsorozatok egy halmazát; a 2. ábrán mutatott példában a zegzugos út az $(5, 4)$ saroknál végződik, és a megfelelő sorozat 9 betűből áll.



3. ábra

Osszuk az $(r, n-r)$ végpontú zegzugos út alatti területet az y-tengellyel párhuzamos, egyenlő távolságra következő egyenesekkel r téglalapra, melyek alapja 1 egység, magasságaik (balról jobbra sorolva fel őket)

$$0,\ 1,\ 3,\ 3,\ 4.$$

Mindegyik téglalap felső oldala a zegzugos út egy egységnyi vízszintes szakasza, és így a betűsorozatban egy x-nek felel meg. A téglalap magasságát (egyben az előzőkben a felső vízszintes szakaszához rendelt q-hatvány kitevőjét), és így a területét is, a szóban forgó x-et megelőző y-ok száma adja meg. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a téglalap területe megegyezik a *szóban forgó x alkotta inverziók számával* ebben a betűsorozatban. Akkor mondjuk, hogy a sorozat betűiből kiválasztható $n(n-1)/2$ pár közül vett valamelyik pár *inverziót* alkot, ha a pár egy x-ből és egy azt megelőző y-ból áll. Az r téglalap együttes területe tehát, vagyis *a zegzugos út alatti terület megegyezik a betűsorozatban előforduló inverziók számával* (példánkban ez 11).

A Gauss–féle binomiális együtthatók tehát nemcsak a zegzugos utak alatt területeket sorolják fel, hanem *ezzel együtt* az éppen vizsgált betűsorozatokban fellépő inverziók számát is. A Gauss–féle binomiális együtthatóknak ez a kapcsolata ismeretes volt.[5] Mi itt a területekről az inverziókra történő szemléletes áttérés lehetőségét kívántuk hangsúlyozni.[6]

A probléma megközelíthető egy egészen eltérő úton is. Erre a dolgozat második részében térünk vissza.

Pólya György
Stanford University,
Stanford, Calif., USA

[5]Lásd pl. *M.G. Kendall–A. Stuart:* The advanced Theory of statistics II. (London 1961) 494. old.

[6]*G. Pólya:* Proceedings of the second Chapel Hill Conference on Combinatorial Math. and its Applications (1970) 381–384. A 4. és 5. bekezdés nagy részét a szervező bizottság szíves engedelmével e cikkből vettük át.