Általános tantervű és szakosított matematika–fizika osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}.$$

2. *a*) Legyen M az ABC tetszőleges háromszög ugyancsak tetszőleges belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$t_{BCM}\cdot\overrightarrow{MA}+t_{CAM}\cdot\overrightarrow{MB}+t_{ABM}\cdot\overrightarrow{MC}=0,$$

ahol t_{BCM}, t_{CAM} és t_{ABM} rendre a BCM, CAM, ill. ABM háromszög területét jelenti.

b) Legyen M az $ABCD$ tetszőleges tetraéder ugyancsak tetszőleges belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$V_{BCDM}\cdot\overrightarrow{MA}+V_{CDAM}\cdot\overrightarrow{MB}+V_{DABM}\cdot\overrightarrow{MC}+V_{ABCM}\cdot\overrightarrow{MD}=0,$$

ahol V_{BCDM}, V_{CDAM}, V_{DABM} és V_{ABCM} rendre a $BCDM$, $CDAM$, $DABM$, ill. $ABCM$ tetraéder térfogatát jelenti.

3. Bizonyítsuk be, hogy a sakktábla 63 mezője lefedhető 21 darab olyan kartonlemezzel, amelyek mindegyike 3 egymás melletti vagy egymás alatti mezőt tud lefedni. Mely mezők maradhatnak fedetlenül?

A speciális matematikai tantervű osztályok részére

1. Egy automatánál a játék feltételei a következők. Egy zseton bedobására az automata feldob egy játékkockát, amelynek lapjain az $1, 2, \ldots, 6$ számok vannak; a dobás eredménye látható. A dobás után választhatunk: vagy felvesszük nyereményünket, amely annyi forint, amennyi a kockán dobott szám, és a játék véget ér; vagy újabb zsetont dobunk az automatába. Az utóbbi esetben az automata ismét feldobja a kockát és a nyereményünk annyi forint, amennyi a két dobott szám szorzata. Újabb választási lehetőségünk nincs, a játék legkésőbb a második dobás után véget ér. Van-e olyan játékmód, amely mellett a nyeremény várható értéke pozitív, ha a zseton ára 6 Ft 50 f?

2. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre igaz a következő állítás:
tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok mellett a

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

polinomra teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n}p'(x_i)\geq 0$$

egyenlőtlenség (ahol $p'(x)$ a $p(x)$ polinom deriváltja).

3. A $H_0, H_1, \ldots$ halmazsorozatot a következő módon állítjuk elő. Kiindulunk egy tetszőleges 1-nél nagyobb természetes számból. Ez a H_0 egyetlen eleme. Továbbmenve lépésről lépésre definiáljuk a halmazsorozat újabb elemeit. Ha már H_n-et definiáltuk, ennek minden $a\in H_n$ eleméből két új számot képezünk: $(a+1)$-et és a^2-et, az így kapott számok lesznek H_{n+1} elemei.

Bizonyítsuk be, hogy a H_k halmaz 2^k $(k=0,1,2,\ldots)$ különböző elemből áll.

*

A 2. feladat nem különbözik lényegesen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1. feladatától (K. M. L. **43.** (1971) 1. old.).

Mind a két esetben az illetékes versenybizottság a következő egyenlőtlenséget általánosította:

„Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e valós számokra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)+(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)+$$
$$+(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\geq 0.\text{”}$$

Az egyenlőtlenség olimpiára javaslása sajnálatos elnézés folytán jött létre. A magyar versenybizottság az esetet 1971. december 7-i levelében a nemzetközi zsüri elnökének tudomására hozta.