

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^2 + yz = 5 \qquad y^2 + xz = 3 \qquad z^2 + xy = 3.$$

2. Legyen  $n \geq 3$  rögzített természetes szám. Bizonyítsuk be az  $n = 3$  esetben, hogy

$$\text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2n}, \quad \text{akkor } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx - \operatorname{tg} (n-1)x}{2} > \frac{\operatorname{tg} nx}{n}.$$

3. Az  $\overline{abcd}$  tízes rendszerbeli szám jegyeire fennáll, hogy  $a > b > c > d$ . Ugyanezek a jegyei valamilyen sorrendben az  $\overline{abcd} - \overline{dcba}$  különbségnek is. Melyik ez a négyjegyű szám?

4. Adott egy parabola és a belsejében egy pont. Tekintsük a parabolának az adott ponton átmenő húrjait. Mi a mértani helye e hurok felezőpontjainak?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  3-mal nem osztható egész szám, akkor  $n^{13} - n$  osztható  $(2^{13} - 2)$ -vel.

6. Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldala rögzített, a  $C$  csúcs pedig úgy mozog, hogy közben a háromszög kerülete változatlan marad.  $C$  melyik helyzeténél lesz a  $C$  csúcshoz tartozó magasságvonal, súlyvonal és az  $AB$  egyenes által bezárt háromszög területe a lehető legnagyobb?

7. Egy sorozat első tagja 2, második tagja 3, további tagjait pedig úgy képezzük, hogy minden egyes tag 1-gyel kisebb legyen, mint a másik két szomszédjának a szorzata. Mennyi a sorozat első 1095 tagjának összege?

8. Jelentse a síkban  $P * Q$  annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek a harmadik csúcsát, amelynek átfogója a  $PQ$  szakasz, és a háromszög  $P$ ,  $Q$ ,  $P * Q$  csúcsai az óramutató járásával ellentétes irányban követik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a sík bármely négy  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontjára nézve az  $(A * B) * (C * D)$  és az  $(A * C) * (B * D)$  ugyanaz a pont.