1. Az 1971. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 2. feladatának megoldásai[1] azt adták eredményül, hogy ha adva van a síkban $4n+1$ pont, amelyek közt nincs 3 egy egyenesen levő, akkor ezekből kiválaszthatók párok (minden pont legfeljebb egy párban szerepelhet) úgy, hogy az egy párba tartozó pontokat összekötve a szakaszoknak legalább n különböző metszéspontja legyen. (A versenyfeladat az $n=5$ esetre vonatkozott.)

A III. megoldáshoz fűzött 2. megjegyzés[2] felveti az állítás élességének kérdését: Vajon ennyi pont birtokában nem lehet-e lényegesen több metszéspontot is létrehozni, illetőleg n metszéspont létrehozásához nem elegendő-e kevesebb pont megadása is? Akármilyen egyszerű is a kérdés, a válaszról vajmi keveset tudunk egyelőre.

Világos, hogy $n=1$-re nem élesíthető a tétel, hiszen egy háromszög és a belsejében egy pont még nem szolgáltat metszéspontot, és pl. egy konvex négyszög a belsejében egy ponttal csak egy metszéspontot ad.

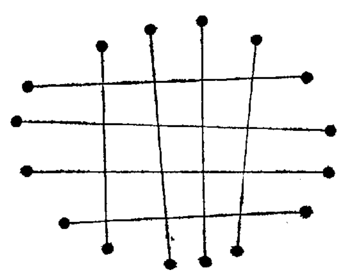
2. Mégis az várható, hogy a pontok számának növekedésével a köztük alkalmasan húzott, közös végpont nélküli szakaszok különböző metszéspontjainak a száma erősebben növekszik, mint egyenes arányosság szerint.

Fel is merül egy gondolat a feladatra adott megoldások javítására. Mindegyik megoldásban felhasználást nyert az a tétel, hogy a sík általános 5 pontja közt mindig szerepelnek egy konvex négyszög csúcsai. Ezt *Klein Eszter*[3] vette észre mint egy általa felvetett általános probléma speciális esetét. Azt kérdezte ő, létezik-e minden k-hoz olyan szám, és ha igen, mi a legkisebb $N(k)$ szám, amire igaz, hogy a sík $N(k)$ általános pontja közül mindig kiválaszthatók egy konvex k-szög csúcsai. Az említett eredmény szerint $N(4)=5$ és világos, hogy $N(3)=3$. *Makai Endre* és *Turán Pál* megmutatta, hogy $N(5)=9$.[4] Általában csak annyi ismeretes, hogy $N(k)$ létezik, mégpedig

$$2^{k-2} < N(k) < \binom{2k-4}{k-2} \qquad (= N^*)$$

azaz 2^{k-2} pont még megadható úgy, hogy ne szerepeljenek köztük egy konvex k-szög csúcsai, de N^* pont közül már mindig ki lehet választani k ilyen pontot. A sejtés az, hogy $N(k)=2^{k-2}+1$. Az első 3 érték ennek megfelel.

3. Ez a felvetett problémához úgy csatlakozik, hogy egy konvex $4s$ oldalú sokszögben létre lehet hozni s^2 metszéspontot közös végpont nélküli átlókkal, amint azt $s=4$ esetére az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ha most már n elég nagy, és úgy bontunk n pontot a versenyfeladat I. megoldása gondolatmenetének megfelelően részekre párhuzamos egyenesekkel, hogy az első csoport N^* pontból álljon, mindegyik további k pontból, akkor így konvex k-szögeket tudunk kiválasztani, a fölöslegesen maradó pontokat mindig továbbvíve a következő k ponthoz. Ilyen módon, ha k elég nagy, sok metszéspontot tudunk létrehozni. Nem nehéz kiszámolni, hogy ha k-t n-től függően elég nagyra választjuk, akkor ilyen módon egy alkalmas c pozitív számértékkel létre lehet hozni $c \cdot n \cdot \lg n$ számú metszéspontot.

A baj csak az, hogy k növekedésével nem egy–két, hanem nagyon sok pontot kell csatolnunk az egyik tartomány pontjai közül a következő tartományéihoz, és így a párhuzamos elválasztó egyenesek mit sem védenek a metszéspontok összeesése ellen.

4. Ha viszont nem vagyunk tekintettel a metszéspontok különbözőségére, akkor megmutatható, hogy van olyan c' szám, hogy n pont közt alkalmasan húzott, közös végpont nélküli szakaszokkal $c' \cdot n^2$ metszőpár keletkezik. Könnyen elképzelhető, hogy a metszéspont–egybeesések nem lehetnek nagyon gyakoriak, annyira, hogy egy c'-nél kisebb c'' állandóval $c'' \cdot n^2$ páronként különböző metszéspont is mindig létrehozható.

5. A következőkben azt fogjuk megvizsgálni – most már sejtések és feltételezések nélkül –, hogy *hány pont megadása szükséges* 2 *metszéspont biztosításához.* Az eredményt kissé meglepőnek találtam és figyelmeztetőnek abban az irányban, hogy túl vérmes reményeket sem szabad táplálni.

a) Ha 6 pont egy konvex hatszög csúcsait alkotja, akkor már biztosítanak 2 metszéspontot, amint azt a 2*a*. ábra mutatja. Az ábra arra is utal, hogy több metszéspont már ebben az esetben sem mindig biztosítható a lehetséges egybeesések miatt.

---

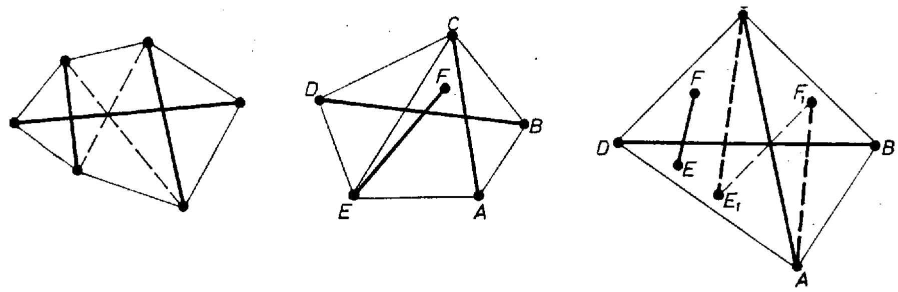
[1] *Surányi János:* Az 1971. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása. K. M. L. 44 (1972) 51–58.

[2] Ugyanott, 56. oldal.

[3] Jelenleg *Szekeres Györgyné* (Sidney, Ausztrália).

[4] Lásd *Erdős P.–Szekeres Gy.* cikkeit: Compositio Math. 2 (1935) és Annales Univ. Sci. Budapestiensis, Sectio Math. 3–4 (1960–61); továbbá P. 85 probléma, K.M.L. 44 (1972) 72.

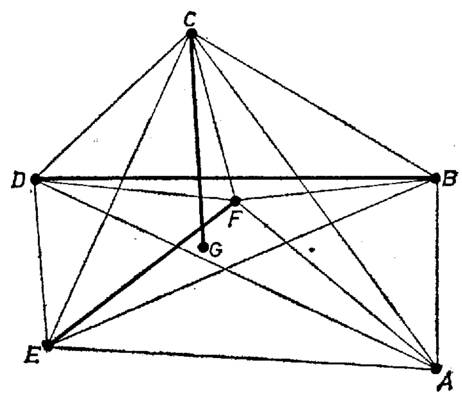
b) Itt nem a hatszög konvexsége a lényeges. Ha egy $ABCDE$ konvex ötszög egyik átlója levágta háromszög tartalmaz még egy pontot, pl. a BCD háromszög egy F pontot, akkor is már biztosítható 2 metszéspont. Az ABC és CDE háromszögek egyike ugyanis nem tartalmazza F-et, mondjuk az előbbi ilyen. Ekkor AC és EF különböző pontokban metszi a BD átlót (2*b*. ábra).



2a. **2b.** **2c.**

c) Már az is elég 2 metszéspont létrehozására, hogy egy $ABCD$ konvex négyszögben pl. a BD átló mindkét oldalán legyen még egy–egy pont, mondjuk az A-val egy oldalon E, C-vel egy oldalon F (2c. ábra). Ekkora két átló és EF ad két metszéspontot, kivéve, ha egy ponton mennek keresztül (az ábrán E_1 és F_1). Ez esetben viszont AF és CE metszi BD-t két különböző pontban.

d) Ha egy $ABCDE$ konvex ötszög átlói körülzárta ötszögben választunk ki egy F pontot, akkor már nem tudunk létrehozni 2 metszéspontot. A 6 pont között ugyanis legfeljebb 3 szakaszt tudunk meghúzni, tehát ezek valamelyikén rajta kell lennie mind a két metszéspontnak. Viszont az F-ből induló szakaszokon csak egy–egy metszéspont van; az ötszög átlóin ugyan 3 (3. ábra), de az ezeket kimetsző szakaszok egyik végpontja közös, így közülük csak egy jelölhető ki.

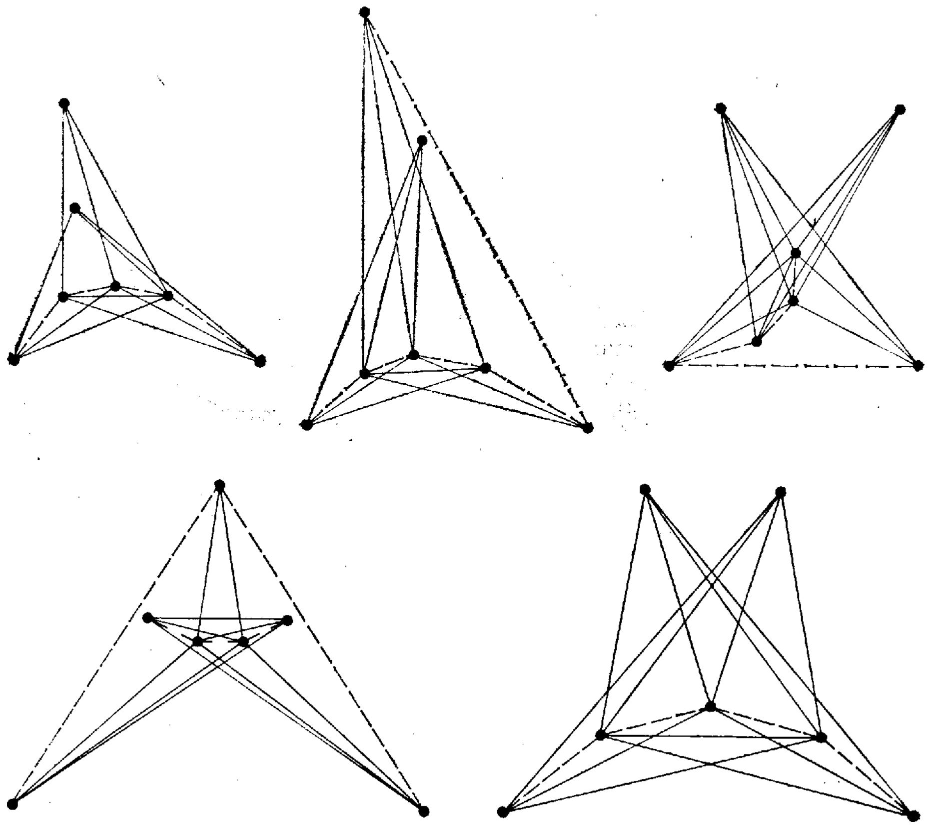


3. ábra

e) Ha az előbbi átlók körülzárta ötszögben még egy hetedik G pontot is választunk, már ismét biztosítható 2 metszéspont. Ha ugyanis G pl. az AEF háromszögben van, akkor GC metszi BD-t és AF, EF közül az egyiket. Ezek a metszéspontok különbözők, mert sem AF-nek, sem EF-nek nincs közös pontja BD-vel.

6. a) Eddig annyira jutottunk, hogy 6 pont még nem feltétlenül elég 2 metszéspont biztosításához. Ha viszont több pontot is ki lehet jelölni úgy, hogy köztük futó közös végpont nélküli szakaszoknak legfeljebb 1 metszéspontja legyen, akkor az ilyen ponthalmaz konvex burka csak háromszög vagy négyszög lehet.

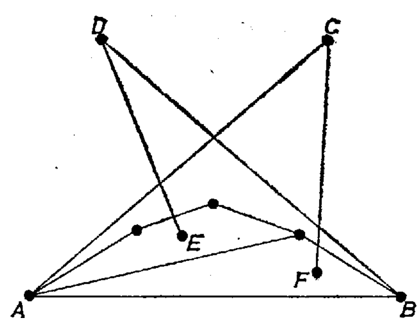
b) A 4. ábra néhány olyan 7 pontból álló pontrendszert mutat, amelyben 1-nél több metszéspont nem hozható létre közös végpont nélküli szakaszokkal. Folytonos vonallal húztuk meg azokat a szakaszokat, amelyeket valamely szakasz metsz, és könnyen ellenőrizhető, hogy az egy–egy szakaszt metsző szakaszok egyik végpontja minden esetben közös és mivel csak 3 szakaszt tudunk kijelölni, láttuk **5. d)**-ben, hogy így nem hozható létre 2 metszéspont.



4. ábra

7. Vizsgáljuk meg a 8 pontból álló pontrendszereket. Tudjuk, hogy eleve elég az olyan pontrendszereket vizsgálni, amelyeknek a konvex burka háromszög vagy négyszög, és ha négyszög, akkor a további pontoknak **5. c)** értelmében az átlók közti négy háromszög egyikében kell mindnek lenniük.

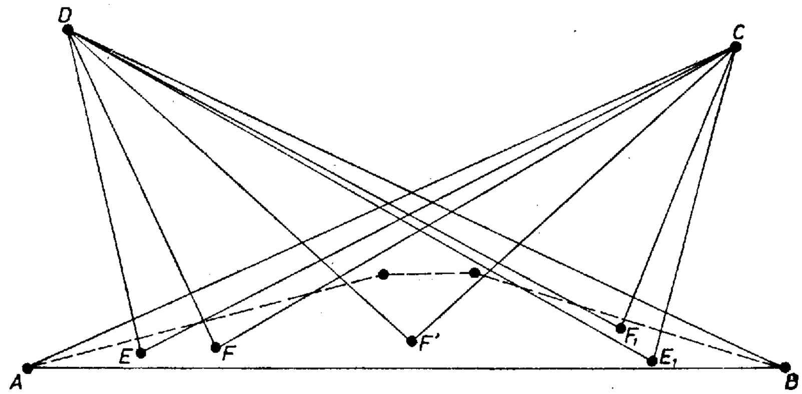
a) Legyen az $ABCD$ négyszög a konvex burok és a további pontok feküdjenek az AB oldalhoz csatlakozó háromszögben. Ha egy itteni pontot C-vel vagy D-vel összekötő szakasz átmetszi másik két pont összekötő szakaszát, akkor már rendelkezésre áll 2 metszéspont, mert átmetszi az egyik négyszögátlót is (5. ábra, E pont).



5. ábra

A C és D elhagyásával maradó pontok konvex burka **5. a)** szerint nem lehet hatszög, de ötszög sem, mert ez tartalmazna még egy pontot, az azt C-vel összekötő szakasz azonban az előző megállapítás szerint az ötszögnek csak egyik, az AB-vel szomszédos oldalát metszheti. Ekkor azonban benne van két szomszédos ötszögoldal meghatározta háromszögben (5. ábra, F pont) és ekkor **5. b)** szerint létrehozható 2 metszéspont.

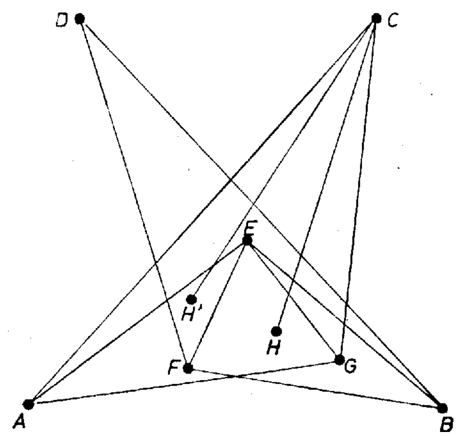
Ha a 6 pont konvex burka négyszög, az 2 pontot tartalmaz még, jelöljük E és F-fel. Az ezeket C-vel és D-vel összekötő szakaszok ismét csak a konvex burok AB-vel szomszédos oldalait metszhetik (6. ábra).



6. ábra

Ha $CDEF$ konvex négyszög, akkor DE és CF különböző pontokban metszi vagy ugyanazt a szakaszt (E és F pont) vagy két közös végpont nélküli szakaszt (E és F' pont). Ha pedig pl. F a CDE háromszögben van (E_1 és F_1 pont), akkor pl. ismét DE és CF két különböző pontban metsz egy szakaszt.

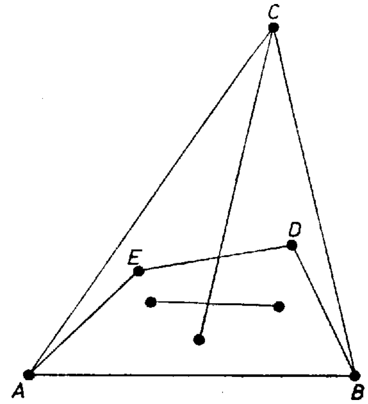
Ha végül a 6 pont konvex burka egy ABE háromszög (7. ábra), akkor egyrészt az A elhagyásával maradó 7 pont közül 3 a $BCDE$ négyszögön kívül van, másrészt **6. a)** szerint a konvex burkuk legfeljebb négyoldalú. Így egy $BCDF$ négyszög lesz. Hasonlóan a B elhagyásával maradó pontok konvex burka egy $AGCD$ négyszög, ahol F és G egybe is eshet.



7. ábra

A nyolcadik pont, H nem lehet az AG, GE, EF és FB határolta négyszögben (ha ez egyáltalán létrejön), mert akkor a HC szakasz metszené az EF, EG szakaszok valamelyikét (7. ábra, H), ami **7. a)** szerint nem lehet. De nem fekhet H pl. az AE, EF, FD közötti háromszögben sem (7. ábra, H' pont), mert ekkor AE-t és BD-t metszené HC.

8. Az a lehetőség maradt csak tehát hátra, hogy a 8 pont konvex burka egy ABC háromszög legyen. Ekkor a valamelyik csúcs elhagyásával maradó 7 pont konvex burka ismét csak háromszög vagy négyszög lehet. Ha pl. a C csúcs elhagyásával maradó pontok konvex burka az $ABDE$ négyszög és a másik 4 pont is konvex négyszöget határoz meg (8. ábra), akkor az utóbbinak C-ből induló átlóját metszi a másik átló és az $ABDE$ konvex burok egy oldala is.

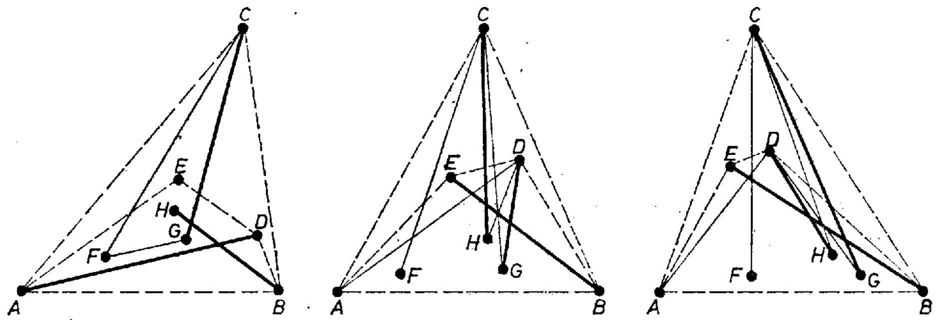


8. ábra

Feltehetjük tehát, hogy a további F, G, H pontok közül az utolsót tartalmazza a CFG háromszög.

Ha F, G, H az ADE háromszögben van (9*a*. ábra), akkor BH metszi AD-t és a CFG háromszög egy oldalát. Hasonló a helyzet, ha a 3 pont a BDE háromszögben van.

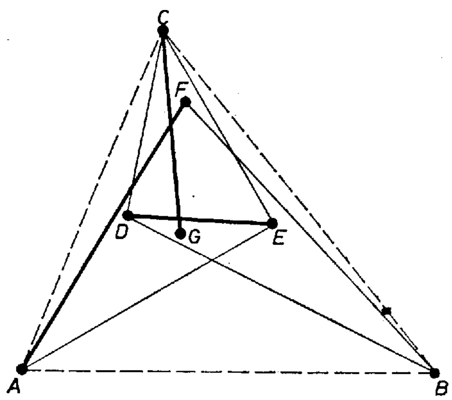
Ha az AB, AD, BE szakaszok közt keletkező háromszögben vannak a pontok, akkor CF, CG, CH legalább 3 különböző pontban metszi az AD, BE átlókat, tehát valamelyiken, mondjuk az utóbbin, legalább 2 metszéspont, a CG-é és a CH-é keletkezik. Ekkor CH és DG vagy CG és DH különböző pontokban metszi BE-t (9*b*. és 9*c*. ábra).



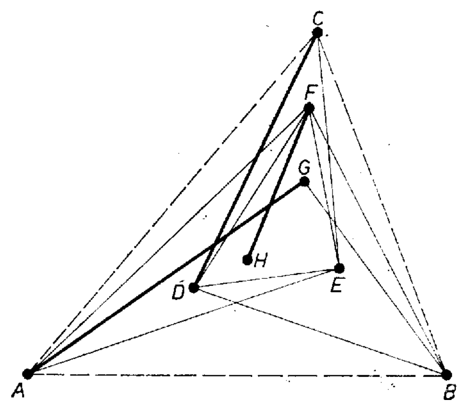
9a. *9b.* *9c.*

Az a lehetőség maradt még, hogy akár A-t, akár B-t, akár C-t hagyjuk el, a maradó pontok konvex burka a BCD, ACE, ill. ABF háromszög. A további 2 pont ez esetben a 3 háromszög közös részeként létrejövő hatszögben van.

Ha van egy G pont pl. az AE, BD, DE szakaszok közt keletkező háromszögben, akkor CG metszi DE-t és AF, BF egyikét (10*a*. ábra).



10a. ábra



10b. ábra

Ha viszont a DEF háromszögben van még két pont, G és H, és pl. H az ABG háromszögben fekszik, akkor FH metszi az AG, BG szakaszok egyikét, mert F mint az ABF konvex burok csúcsa az AGB háromszögön kívül van (10*b*. ábra). Mondjuk AG-t metszi. Ezt metszi azonban BD és CD egyike is, mert BCD az A elhagyásával maradó 7 pont konvex burka.

Ezzel az összes lehetséges eseteket végigpróbáltuk, és azt találtuk, hogy a sík bármely 8 általános helyzetű pontja közt meghúzhatók közös végpont nélküli szakaszok úgy, hogy azoknak legyen 2 különböző metszéspontjuk. Mint a versenyfeladathoz fűzött megjegyzésekből[5] tudjuk, ebből már következik, hogy ha $n \geqq 2$, akkor $4n$ pont között mindig meghúzhatók közös végpont nélküli szakaszok úgy, hogy azoknak legalább n különböző metszéspontja legyen.

A versenyfeladatban szereplő 5 metszéspont tehát már 20 pont megadásával is biztosítható.

[5] Lásd az idézett cikkben, az 55. oldalon.