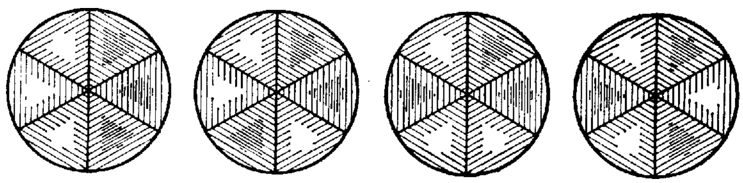
I. megoldás. a) Ha a dobozba csak egyféle sajtot teszünk, az elhelyezés egyértelmű, és a sajt fajtájának a megválasztására 3 lehetőségünk van. Így 3 elrendezést kapunk.

b) Kétféle sajtot téve a dobozba, figyelembe vesszük, hogy az egyes fajtákból hány cikket használunk fel. A cikkek számát háromféleképpen választhatjuk meg: egyikből 5 cikket veszünk, a másikból 1-et; vagy 4-et és 2-t, vagy pedig mindkét fajtából hármat. Ha egy fajtából 5 cikket teszünk a dobozba, és egy másikból 1-et, az elhelyezés egyértelmű; az elsők fajtáját 3-féleképpen választhatjuk meg, a másodikét 2-féleképpen. Az elhelyezések száma ezek szerint $3\cdot 2=6$.

Akkor is 6-féleképpen választhatjuk meg a kétféle sajt fajtáit, ha egyikből 4-et, egy másikból 2-t használunk fel, ekkor azonban már nem egyértelmű az elhelyezés: a két azonos fajtájú sajtcikk vagy szomszédos, vagy második szomszédjai egymásnak, vagy egymással szemben vannak. Az ilyen választások és elhelyezések száma tehát $6\cdot 3=18$.

Ha két fajtából három–három cikket veszünk, akkor az elhelyezésre négy lehetőségünk van (1. ábra).



1. ábra

A felhasznált két fajtát pedig most csak 3-féleképpen választhatjuk meg (ennyiféleképpen lehet azt megadni, hogy melyiket *nem* használjuk fel a három fajta közül), eszerint az ilyen elhelyezések száma $4\cdot 3=12$.

c) Ha mindhárom fajtából teszünk a dobozba, az egyes fajtákból rendre $4+1+1$, vagy $3+2+1$, vagy $2+2+2$ cikket választhatunk. A $(4+1+1)$ esetben ismét a csak egy–egy cikkel képviselt fajtát célszerű elhelyezni, majd a dobozt a 4 egyforma sajttal feltölteni. Az 1–1 db cikk – mint fent – lehet szomszédos, másod-szomszéd és szemközti. Az első két esetben 3-féleképpen választhatjuk meg e párból annak a fajtáját, amelyik az óramutató járása szerint előbb áll, és 2-féleképpen a másiknak a fajtáját. Ha viszont e pár tagjai szemköztiek, az elhelyezést egyértelműen meghatározza, hogy melyik fajtából használunk 4 cikket. Az elhelyezések száma itt $2\cdot 3\cdot 2+3=15$.

A $(3+2+1)$ esetben 3-féleképpen választhatjuk azt a fajtát, amelyből csak egy cikket használunk, és ezután 2-féleképpen azt, amelyikből kettőt. Helyezzük el először az 1 cikkel képviselt fajtát, ez után a többi öt hely közül az azonos fajtájú két cikk helyét $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatjuk meg. Így $10\cdot 6=60$ elhelyezést kapunk.

Végül a $(2+2+2)$ esetben az azonos fajtájú cikkpárok vagy mind szomszédosak, vagy csak két pár, vagy csak egy marad szomszédos közülük, vagy egy sem. Az elhelyezések száma az előzők mintájára rendre 2, 3, $3\cdot 2=6$, az utolsó elv mellett pedig 5 ($\mathbf{C}\,H\,\mathbf{C}\,M\,H\,M$, $\mathbf{C}\,M\,\mathbf{C}\,H\,M\,H$, $\mathbf{C}\,H\,M\,\mathbf{C}\,H\,M$, $\mathbf{C}\,H\,M\,\mathbf{C}\,M\,H$ és $\mathbf{C}\,M\,H\,\mathbf{C}\,M\,H$), így ebben az esetben együttvéve 16 elhelyezést kapunk.

Eredményeinket összegezve, a lehetőségek száma: $3+(6+18+12)+(15+60+16)=130$.

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás (vázlat). Osztályozzuk az elhelyezéseket aszerint, hogy bennük a cikkeken körbehaladva hány olyan szomszédpárt találunk, amelynek a tagjai különböző fajtájúak. Más szóval a dobozkitöltések feldarabolását tekintjük olyan *blokk*okra, amelyek egymáshoz csatlakozó ugyanolyan fajtájú sajtcikkekből állnak.

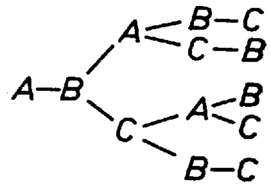
1. Ha ilyen pár nincs, akkor a cikkek egyformák, tehát 3 elhelyezés van.

2. Csak egy ilyen blokkválasztó vonal nyilván nem lehet, a következő eset tehát az, amikor két helyen csatlakozik egymáshoz két különböző fajtájú sajtcikk. Ekkor tehát kétféle sajtot használunk, ezekből rendre $5+1$, $4+2$, $3+3$ cikket vehetünk, és a lehetőségek száma a fajták választását is figyelembe véve rendre $3\cdot 2+3\cdot 2+3=15$.

3. Ha az elhelyezésben három blokk van, az egyes blokkokra rendre $(4+1+1)$, $(3+2+1)$ vagy $(2+2+2)$ cikket tehetünk, és a fajták választása szerint rendre $3\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2+2=20$ a lehetőségek száma.

4. Ha négy blokk van, akkor bennük a cikkek száma vagy $(3+1+1+1)$, vagy $(2+2+1+1)$. A lehetőségek száma az első esetben $2\cdot 3\cdot 3$, és ugyanennyi a második esetben is, feltéve, hogy a két kettes blokk szomszédos; ha viszont ezek szemköztiek, és különböző fajtájúak, a lehetőségek száma 3. Ha szemköztiek és azonos fajtájúak, a lehetőségek száma $3\cdot 3$. Így összesen $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3+3+3\cdot 3=48$ elhelyezést adhatunk meg.

5. Öt blokk esetén csak $(2+1+1+1+1)$ lehet a számuk. Helyezzük el először a két szomszédos egyforma cikket (fajtáját 3-féleképpen választhatjuk meg, ezt a továbbiakban A-val jelöljük). Az óramutató járása szerint haladva tovább, utánuk egy tőlük különböző fajtájú cikket kell választanunk (két lehetőség, a választott fajtát B-vel jelöljük), az esetek kifejlesztését a 2. ábra mutatja, itt $5\cdot 3\cdot 2=30$ elhelyezés van.



2. ábra

6. Végül, ha minden szomszédpárt különböző fajtájú sajtok alkotnak, 4 lényegesen különböző elrendezés van:

I.	A B A B A B,	III.	A B C A B C,
II.	A B A B A C,	IV.	A B C A C B,

és a betűk helyére fajtákat írni $3+3\cdot 2+2+3=14$-féleképpen lehet.

Mindezek szerint összesen $3+15+20+48+30+14=130$ lehetőség van.

Megjegyzés. Az alábbi táblázat megkönnyíti az I. és II. megoldásban különböző szempontok szerint számba vett elrendezések azonosítását.

I $\diagdown$ II	1	2	3	4	5	6	Össz.
6	3	–	–	–	–	–	3
$5+1$	–	6	–	–	–	–	6
$4+2$	–	3	–	12	–	–	18
$3+3$	–	3	–	6	–	3	12
$4+1+1$	–	–	6	9	–	–	15
$3+2+1$	–	–	12	18	24	6	60
$2+2+2$	–	–	2	3	6	5	16
Össz.	3	15	20	48	30	14	130

III. megoldás. Könnyű lenne megadni a választ, ha rögzítenénk azt a dobozt, amelyikbe visszarakunk 6 cikket, és benne az I., II., ..., VI. helyet is kijelölnénk. Így ugyanis mind a 6 helyre 3–3-féleképpen választhatjuk egymástól függetlenül a C,- H,- M-sajttípus egy–egy cikkét, tehát $3^6=729$-féle elhelyezést kapunk. Az így kapott elhelyezések azonban feladatunk szempontjából nem mind különbözők. Például az $M\,C\,M\,H\,C\,H$ elrendezésből alkalmas forgatásokkal a nem azonosnak tekintett

$$C\,M\,H\,C\,H\,M,\quad M\,H\,C\,H\,M\,C,\quad H\,C\,H\,M\,C\,M,\quad C\,H\,M\,C\,M\,H,\quad H\,M\,C\,M\,H\,C$$

elhelyezéseket kapjuk. Általában egy elhelyezésből – a dobozt körbeforgatva – öt további, a fenti leszámlálásban ugyancsak figyelembe vett elhelyezést kapunk. Nem szabad azonban ennek alapján arra gondolnunk, hogy a feladat megoldását úgy kapjuk meg, hogy az előbbi 729-et osztjuk 6-tal. (Erre utal már csak az a körülmény is, hogy 729 nem is osztható 6-tal.) Némely elhelyezésből ugyanis így 5-nél kevesebb új elhelyezési tervet kapunk, sőt esetleg egyet sem. Ilyen például $M\,C\,M\,M\,C\,M$, amelyből csak az első két lépésben kapunk tőle formálisan különböző tervet: $C\,M\,M\,C\,M\,M$, $M\,M\,C\,M\,M\,C$, és az eredeti tervet már a harmadik lépésben visszakapjuk.

Az ilyen elrendezéseket külön fel kell sorolnunk előbb, hogy a visszamaradók számát 6-tal oszthassuk. Azokat az elrendezéseket keressük tehát első lépésben, amelyeket már egy 360°-nál kisebb forgatás önmagába visz át, más szóval amelyeknek valamilyen ciklikus szimmetriájuk van.

A ciklus tagjainak száma nyilvánvalóan csak 6 vagy ennek osztója lehet, vagyis 3, 2 vagy 1. A rövidebb ciklusokban csak 3, 2, ill. 1 tagot választhatunk szabadon, sőt itt is figyelembe veendő, hogy amint némely ciklus nem igazi 6-tagú, ugyanúgy az 1-tagú ciklus kiadódik a 2-tagúak között is, a 3-tagúak között, és a 6-tagúak között is.

Mármost az egytagú ciklus 3-féleképpen választható. A kéttagúakat keresve a gondolható 3^2-ből el kell hagyni azt a 3-at, amelyeknek a tagjai egyenlők: CC, HH és MM, vagyis a valódi kéttagúak száma, rögzített doboz esetén 3^2-3, és ezek forgatással $(3^2-3)/2=3$ különböző berakást jelentenek. Hasonlóan a valódi háromtagúak száma, rögzítéssel $3^3-3=24$, forgatással ennek 3-adrésze: 8.

Ezek szerint, a rögzítést tekintetbe véve, $3^6-3-(3^2-3)-(3^3-3)=696$ olyan berakásmód marad, amely valóban hattagú ciklusba tartozik bele, tehát a keresett szám:

$$3+\frac{3^2-3}{2}+\frac{3^3-3}{3}+\frac{3^6-3-(3^2-3)-(3^3-3)}{6}=130.$$

Szendrei Mária (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Breuer Péter (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Eredményünk így is értelmezhető: ha dominójátékot készítünk szabályos hatszög alakú kövekből úgy, hogy a köveket 6 egybevágó szabályos háromszögre osztjuk, és ezekbe minden lehető módon 2, 1 vagy 0 pontot írunk, akkor a kőkészlet 130 darabból fog állni.