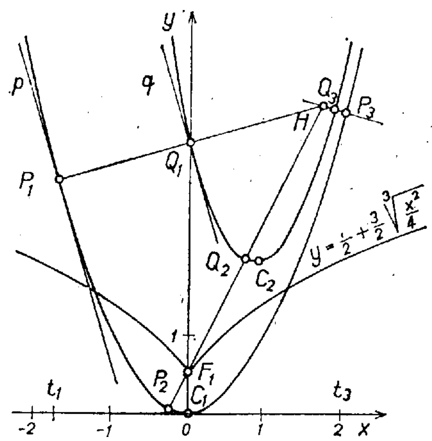
I. megoldás. Tegyük fel, hogy a feladat kérdésére a válasz igenlő, a p parabola t abszcisszájú $P(t,t^2)$ pontja és a q parabola $Q(u,2u^2-7u/2+57/16)$ pontja teljesíti a követelményt. Ekkor p-nek P-beli és q-nak Q-beli érintője párhuzamos egymással.



Mivel e két görbe esetében az ordináta az abszcisszának differenciálható függvénye, azért az érintő iránytangensét megadja a deriváltnak az illető helyen fölvett értéke, p és P esetében $2t$, q és Q esetében $4u-7/2$, és e kettő egyenlő egymással:

(1) $$2t = 4u - 7/2, \qquad t = 2u - 7/4.$$

Másrészt a PQ egyenes merőleges mindkét érintőre – más szóval PQ a két parabola közös normálisa – eszerint q-nak Q-beli normálisa átmegy a P ponton. E normális iránytényezője $-1/(4u-7/2)$, hacsak a nevező 0-tól különböző – azaz $u \neq 7/8$–tehát egyenlete

(2) $$y - \left(2u^2 - \frac{7}{2}u + \frac{57}{16}\right) = \frac{-1}{4u-7/2}\,(x-u),$$

és ezt P koordinátái kielégítik. Ezeket (1) alapján mindjárt u-val kifejezve, u-ra kapunk egyenletet:

$$\left(2u-\frac{7}{4}\right)^2 - 2u^2 + \frac{7}{2}u - \frac{57}{16} = \frac{-1}{4u-7/2}\,(u-7/4),$$

(3) $$8u^3 - 21u^2 + \frac{45}{4}u = 8u\left(u^2 - \frac{21}{8}u + \frac{45}{32}\right) = 8u\left(u - \frac{15}{8}\right)\left(u - \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Eszerint u, majd (1) alapján t megfelelő értékei, végül a követelményt kielégítő P, Q pontpárok a következők (oszlopokba rendezve):

$u_1 = 0$	$u_2 = \frac{3}{4}$	$u_3 = \frac{15}{8}$
$t_1 = -\frac{7}{4}$	$t_2 = -\frac{1}{4}$	$t_3 = 2$
$P_1\left(-\frac{7}{4}; \frac{49}{4}\right)$	$P_2\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$	$P_3(2;4)$
$Q_1\left(0; \frac{57}{16}\right)$	$Q_2\left(\frac{3}{4}; \frac{33}{16}\right)$	$Q_3\left(\frac{15}{9}; \frac{129}{32}\right)$

Megjegyzés. P_i, Q_i $(i=1,2,3)$ pontpárok pontos megadása azon múlott, hogy a (3) harmadfokú egyenletnek $u=0$ gyökét felismertük. Ha t helyett u-t küszöböltük volna ki, akkor nem állt volna elő ez a szerencsés helyzet. Hasznos tehát néha az efféle próbálkozás.

II. megoldás (vázlat). Bármely két parabola, v_1 és v_2, hasonló egymáshoz (alakra nézve), hiszen egyetlen lineáris adatuk, a p_1, ill. p_2 paraméterük meghatározza őket, v_1-et $\lambda = p_2/p_1$ arányban nagyítva és kellően elmozdítva v_2-t kapjuk. A transzformációban az F_1, ill. F_2 fókuszok és a C_1, ill. C_2 csúcsok természetesen egymásnak felelnek meg páronként. Továbbá v_1-ből egy tetszőleges A_1 pontnak v_2-beli megfelelőjét, A_2 az a félegyenes metszi ki, amely F_2-ből indul és amelyre a $C_2F_2A_2$ szög nagyság és forgási irány szempontjából egyenlő a $C_1F_1A_1$ szöggel.

Amennyiben még a két parabola tengelyei párhuzamosak (és síkjuk közös), az A_2-beli érintő párhuzamos az A_1-beli érintővel, ekkor v_1 és v_2 centrális hasonlósági helyzetben vannak egymáshoz képest – hacsak $C_1F_1F_2C_2$ nem paralelogramma –, a hasonlóság centruma az F_1F_2, C_1C_2 egyenespár H metszéspontja. (A kiemelt esetben pedig transzlációval vihető át egymásba v_1 és v_2).

Esetünkben fordítva, olyan P, Q pontpárt keresünk a párhuzamos tengelyű p, q parabolapáron, amelyekben az érintők párhuzamosak. Ezért P, Q a hasonlóságban megfelelő pontpár, ugyanis a parabolához bármely iránnyal párhuzamosan egy és csakis egy érintő illeszthető. Így a PQ egyenes átmegy H-n. Ezek alapján tervünk a következő: kiszámítjuk H koordinátáit, felírjuk q-nak u abszcisszájú Q pontjában az érintőre merőleges n egyenes – a fenti normális – egyenletét, ekkor u-ra abból kapunk egyen1etet, hogy H koordinátái kielégítik n egyenletét.

Mármost az adott p parabola C_1 csúcsa az origó, paramétere $p_1 = 1/2$. Hasonlóan q egyenletét kellően alakítva:

$$\left(x-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y-\frac{65}{32}\right),$$

tehát csúcsa: $C_2\left(\frac{7}{8},\frac{65}{32}\right)$,paramétere: $p_2 = \frac{1}{4}$. Így a q parabola $p_2/p_1 = 1/2$ arányú kicsinyítéssel áll elő p-ből, C_2 felezi a C_1H szakaszt, más szóval H a C_1-nek C_2-re vonatkozó tükörképe: $H\left(\frac{7}{4},\frac{65}{16}\right)$ Ezt a fenti (2)-be helyettesítve és rendezve

$$\left(\frac{65}{16}-2u^2+\frac{7}{2}u-\frac{57}{16}\right)\left(4u-\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{7}{4}-u\right)=0, \quad 8u^3-21u^2-\frac{45}{16}u=0,$$

mint az I. megoldásban.

Megjegyzések. 1. A fenti (2) mintájára az $y = x^2$ normálparabola (u, u^2) pontjában a normális egyenlete $x + 2uy - (2u^3 + u) = 0$, ill. u szerint rendezve $2u^3 - (2y - 1)u - x = 0$ (ez az alak már $u = 0$ esetén is érvényes). Ennek harmadfokú volta azt jelenti, hogy tetszés szerint választva egy $P(x, y)$ pontot, ehhez három olyan (u, u^2) pontja tartozik a normálparabolának, amelynek normálisa átmegy P-n. Ezt így szokás mondani: bármely parabola összes normálisait véve, ezek ***harmadosztályú görbesereget*** alkotnak, a sík bármely pontján három megy át a sereg egyenesei közül. Hozzá kell azonban tennünk ehhez, hogy szemléletesen csak akkor igaz ez, ha a harmadfokú egyenlet u-ra három egymástól különböző, *valós* gyököt szolgáltat. Felírva a gyököket az iskolai függvénytáblázat[1] 251. 31 – 32 képletei szerint, akkor és csak akkor, kapunk ilyen három gyököt, ha

$$\left(-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{2y-1}{3}\right)^3<0, \quad \text{azaz} \quad y>\frac{1}{2}\left(1+3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\right),$$

más szóval, ha P „fölötte" van az $y = (1 + 3\sqrt{x^2/4})/2$ egyenletű vonalnak (lásd az ábrát). – Esetünkben q hasonló görbéjét is figyelembe kell venni.

2. A fentiek szerint $P_i(i = 1, 2, 3)$ a p-nek és Q_i a q-nak olyan ponthármasa, amelyekben megrajzolt normálisok egy pontban (H-ban) metszik egymást. Éppen ennek feltételét állapítottuk meg az 1770. feladatban;[2] a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontjának p tengelyén, az $x = 0$ egyenesen kell lennie, a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög súlypontjának pedig q tengelyén, az $x = \frac{7}{8}$ egyenesen. Valóban,$(t_1 + t_2 + t_3) = 0$ és $(u_1 + u_2 + u_3)/3 = 7/8$.

3. Az ábra szemlélete azt sejteti, hogy ha p-t és q-t egy térképen egy folyó két partjának tekintjük, akkor a folyó a P_3Q_3 normálisszakasz mentén a legszűkebb, hasonlóan a P_1Q_1 szakasz egy bizonyos környezetében szintén mindenütt szélesebb a P_1Q_1 szakasznál, végül P_2Q_2-nek egy környezetében a P_2Q_2 szakasz a legnagyobb szélesség. – A kérdés vizsgálatához az iskolai ismeretanyag nem elegendő. Azoknak, akik a kérdéssel foglalkozni akarnak, a következő két ötletet adjuk. Definiálni kellene, mit értsünk q-nak egy, a p-n felvett P ponthoz legközelebbi Q pontján. Vajon igaz-e, hogy PQ mindig átmegy a fenti H hasonlósági centrumon?

---

[1] *Hack F.– Kugler S.-né:* Függvénytáblázatok, Matematikai és fizikai összefüggések. Tankönyvkiadó. Budapest. 1968.

[2] Lásd a megoldást K. M. L. 43 (1971) 56.