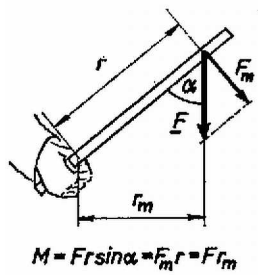
Sztatikai feladatok megoldása II. [1]

A forgatónyomaték fogalmának megértéséhez képzeljük el, hogy valaki egy hosszú rudat tart egyik végénél fogva. Ha a rúdra súlyt akasztunk, akkor a kifejtendő hatás nemcsak a súly nagyságától, hanem a súly és a kezünk közti távolságtól is függ; minél messzebb rakjuk a terhelést, annál erősebben kell tartani a rudat. Persze mindez csak akkor van így, ha az erő nem a rúd irányába mutat. Ha a rudat függőlegesen (lefelé) tartjuk, akkor teljesen mindegy, hogy hova akasztjuk a súlyt. Ennek alapján jogos bevezetni egy új mennyiséget az

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$$

egyenlőséggel. Ezt a számot az **F** erőnek a tőle **r** távolságban levő ponton átmenő, az **F** és az **r** síkjára merőleges tengelyre vonatkozó forgatónyomatékának nevezzük (11. ábra). α az erő és helyvektor egymással bezárt szöge.



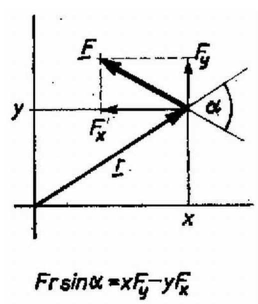
11. ábra

Természetesen a fenti szemléltetés nem indokolja, miért pont ezt a mennyiséget neveztük forgatónyomatéknak. Végeredményben az a döntő, hogy a (2) egyenletbe ennek alapján behelyettesített mennyiségekkel az egyenletrendszer a valósággal egyező eredményt ad.

Az egyenletet megfelelően átrendezve láthatjuk, hogy

$$M = F \cdot (r \cdot \sin\alpha) = F \cdot r_m,$$
$$M = (F \cdot \sin\alpha) \cdot r = F_m r,$$

ahol r_m a forgástengelynek és az erő hatásvonalának távolsága, F_m az **F** erő a támadáspontot a forgástengellyel összekötő egyenesre merőleges komponensének a nagysága. A gyakorlatban általában az utóbbi két egyenlőség valamelyikét használjuk.



2. ábra

A definíció alapján könnyen bizonyítható az is, hogy a 12. ábra szerinti derékszögű koordináta-rendszert választva

$$M = xF_y - yF_x.$$

(Ez egyébként nyilvánvalóvá válik, ha az **F** erőt komponenseivel helyettesítjük, és azok forgatónyomatékát külön-külön számoljuk, majd összegezzük.)

Láthatjuk továbbá, hogy a forgatónyomatékok szempontjából nagyon fontos, hogy hol van az erő támadáspontja. Az erővektorokat nem mozgathatjuk tetszőlegesen; a forgatónyomaték csak akkor nem változik, ha az erőt hatásvonalában toljuk el.

A forgatónyomatékot mindig valamilyen (képzeletbeli vagy valóságos) forgástengelyre vonatkoztatjuk. Nagyon érdekes tény, hogy ha teljesül a (1) egyenlőség, azaz a testre ható erők eredője nulla, akkor teljesen mindegy, hogy a testre ható erők forgatónyomatékát melyik tengelyre vonatkoztatjuk, mert mindenképpen ugyanazt az értéket kapjuk.

[1] A cikk első részét l. a szeptemberi számban. Ugyanott a 35. oldal negyedik bekezdésének utolsó sora helyesen: „... általa kifejtett erővel *és forgatónyomatékkal* helyettesíthetjük." Ennek megfelelően kiegészítendő a 4. ábra.

Legyenek a testre ható erők: $\mathbf{F}_1$,$\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$. Ha az i-edik erőt $\mathbf{F}_i$-vel, támadáspontjának koordinátáit x_i-vel és y_i-vel jelöljük, akkor ezen erő forgatónyomatéka a koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó tengelyre:

$$M_i = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}.$$

E tengelyre tehát összesen

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = (x_1 F_{1y} - y_1 F_{1x}) + (x_2 F_{2y} - y_2 F_{2x}) + \ldots + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})$$

forgatónyomaték hat.

Számítsuk ki, mekkora nyomaték forgat egy olyan tengely körül, amely az x_0, y_0 ponton halad keresztül! Az i-edik erő nyomatéka ekkor

$$M_i' = (x_i - x_0) F_{iy} - (y_i - y_0) F_{ix},$$

mert megváltozik az erő támadáspontja és a forgástengely közötti távolság. Átrendezve:

$$M_i' = (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) - x_0 F_{iy} + y_0 F_{ix} = M_i - x_0 F_{iy} + y_0 F_{ix}.$$

Az összes nyomaték:

$$M' = M_1' + M_2' + \ldots + M_n' = (M_1 - x_0 F_{1y} + y_0 F_{1x}) + (M_2 - x_0 F_{2y} + y_0 F_{2x}) + \\ + \ldots (M_n - x_0 F_{ny} + y_0 F_{nx}).$$

Az összeget megfelelően rendezzük, x_0-t, y_0 t kiemeljük:

$$M' = M_1 + M_2 + \ldots M_n - x_0 (F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}) + y_0 (F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}).$$

Amennyiben a testre ható erők eredője nulla, akkor

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0,$$
$$F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \quad \text{így}$$
$$M' = M_1 + M_2 + \ldots M_n = M,$$

azaz a forgatónyomaték nem változik.

E bizonyításnak egy speciális esete az, amikor kiszámoljuk, hogy az erőpár forgatónyomatéka bármely tengelyre ugyanakkora. Ebből következik az is, hogy a (2) egyenletet tetszőleges tengelyre felírhatjuk.

Eddig csak olyan esetekkel foglalkoztunk, amikor a vizsgált testre ható erők egy síkban voltak; a forgástengelyt úgy választottuk, hogy az erre a síkra merőleges legyen. Térbeli problémánál a kiválasztott tengely körüli forgatónyomatékot úgy kell meghatározni, hogy a testre ható erőket egy, a tengelyre merőleges síkra vetítjük, és a vetületek nyomatékával számolunk. (Később ez az eljárás vezet arra, hogy a forgatónyomatékot is mint vektormennyiséget definiáljuk az $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$ vektoriális szorzattal. A fenti módszerrel tulajdonképpen az $\mathbf{M}$ vektornak az adott tengely irányába eső vetületét kapjuk meg.)

Mint a 2. feladat megoldásánál is láthattuk, az egyszerűbb problémáknál a (2) egyenletet nem kell felhasználni. Nézzük most a cikk első részében közölt 1. feladatot!

A megoldáshoz a 3. ábrán látható szétbontást alkalmazzuk. Az erőket vízszintes és függőleges komponensükkel (x, illetve y index) helyettesítjük. Az egyenletek felírása előtt pozitív irányt választunk; az ezzel ellentétesen mutató komponensek negatív előjelet kapnak. Kijelöljük a pozitív forgásirányt is.

A vízszintes rúdra az (1) egyenletből:

$$-A_x + C_x = 0,$$
$$A_y - G_1 + C_y - G = 0.$$

A forgatónyomatékokat az A pontra írjuk fel, mert ezen egy ismeretlen erő hatásvonala keresztülhalad, és így ez az erő az egyenletben nem fog szerepelni:

$$G_1 \cdot \frac{l}{2} - C_y \cdot l \cdot \sin\alpha + G \cdot l = 0.$$

Ehhez hasonlóan a ferde rúdra:

$$B_x - C_x' = 0, \qquad B_y - G_2 - C_y' = 0.$$

A forgatónyomatékok a B pontra:

$$G_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha + C_y \cdot l \cdot \sin\alpha - C_x \cdot l \cdot \cos\alpha = 0.$$

Egyenletrendszerünkben ismeretlenek az A, B, C, C' erők függőleges és vízszintes komponensei, összesen 8 ismeretlen. A megoldhatósághoz szükséges további két egyenletet a (3) összefüggésből kapjuk meg:

$$C_x = C'_x, \qquad C_y = C'_y.$$

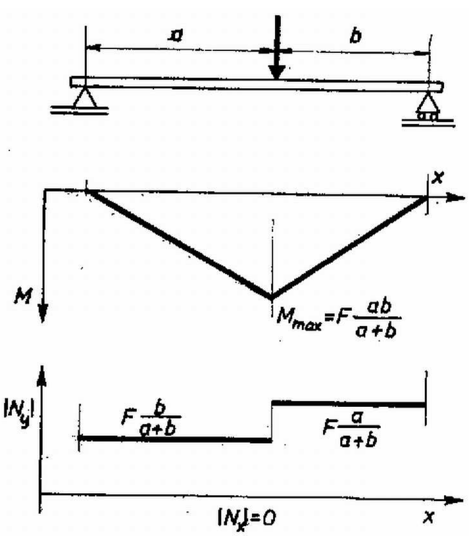
(Azt, hogy az erők ellentétes irányúak, a berajzoláskor figyelembe vettük.) Ez az egyenletrendszer már megoldható; végeredményben

$$A_x = B_x = C_x = \frac{(G_2/2)\cdot\sin\alpha + (G_1/2) + G}{\cos\alpha},$$
$$A_y = \frac{G_1(\sin\alpha - l/2) - G(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha},$$
$$B_y = \frac{(G_1/2)+G}{\sin\alpha} + G_2 \qquad C_y = \frac{(G_1/2)+G}{\sin\alpha}.$$

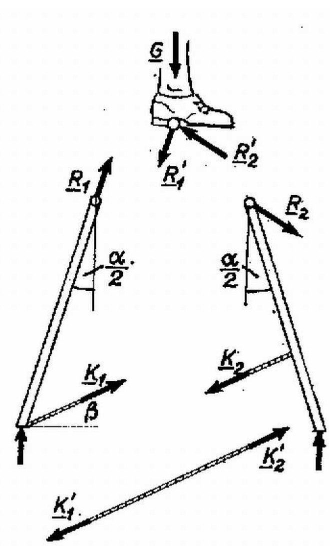
Ha a megadott számértékeket behelyettesítjük, megkapjuk a keresett erőket. (Végezzük el a behelyettesítést $G_1 = G_2 = 60$ kp, $G = 30$ kp, $\alpha = 45°$ mellett, és határozzuk meg az erőket nagyság és irány szerint!)

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha valamilyen ötletes módon elkerüljük a nyolcismeretlenes egyenletrendszer megoldását. (Például először a 2. ábra szerinti szerkezetet vizsgálva, meghatározzuk A-t és B-t, utána a ferde rúd egyensúlyi feltételéből kiszámítjuk C-t.) *A fenti módszer azonban teljesen általános, alkalmazása semmilyen különleges ötletet nem igényel.*

Ha a 4. ábra szerinti darabolást alkalmazzuk, akkor azt is megkapjuk, hogy az egyes rudakban mekkora erők hatnak. A rúdban ható erő értelemszerűen az az erő, amellyel a rúdnak képzeletben eltávolított egyik részét helyettesítjük. A rúdban ható erő kiszámolásánál tehát azt kell felhasználni, hogy a megmaradt rész egyensúlyban van, ezért az elhagyott rész reá pontosan akkora erővel (és forgatónyomatékkal) hat, hogy az kiegyenlítse a külső hatásokat. Ehhez hasonlóan definiálhatjuk a rúdban ható forgatónyomatékot is. (Lásd még: a K. M. L. 1970. évi 4. szám 860. feladat megoldását.) A 13. ábrán láthatjuk egy tartó egyes keresztmetszetein ható erőket és forgatónyomatékokat ($|N_x|$, $|N_y|$ az erő vetületei).



13. ábra



14. ábra

A valóságban a rúdban ható erő mérésére a rúd deformációit használjuk fel. Ha a rúd megnyúlik, húzóerőt, ha egyes keresztmetszetei elcsúsznak egymáson (mint a kártyalapok), akkor rúdra merőleges, ún. nyíróerőt továbbít. Ha a rúd meghajlik, akkor forgatónyomatékot ad át.

Vannak feladatok, amelyek megoldása jelentősen egyszerűsödik, ha felhasználjuk a problémában található szimmetriákat. (Egy ilyen szimmetria-tulajdonság felhasználása egy forgatónyomatéki egyenlettel ekvivalens.) Óvatosnak kell lenni azonban, mert a helytelenül alkalmazott szimmetria-meggondolások nagyon nehezen felderíthető hibákra vezetnek. (Az itt elkövethető hibák tanulmányozására oldjuk meg a következő feladatot. α csúcsszögű létra áll súrlódásmentes síkon. A létra szárait egy, a vízszintessel $\beta \neq 0$ szöget bezáró kötél köti össze, amely az egyik szár aljából indul ki. Mekkora erő feszíti a kötelet, ha a létra tetején G súlyú ember áll? A 14. ábrán berajzoltuk a javasolt darabolást, és az egyes részekre ható erőket, ennek alapján megkezdhetjük a megoldást.)

Végül előfordulhatnak olyan esetek, amikor az itt tanult módszerrel nem tudjuk a feladatot megoldani. Ezek az úgynevezett sztatikailag határozatlan szerkezetek.

Sztatikailag határozatlan egy olyan szerkezet, amelyben vannak olyan pontok, amelyek helye geometriailag túlhatározott. Határozatlan lesz például az 1. ábrán látható tartó, ha a C pontban a két rudat mereven összekötjük, mert ekkor az A és B pontok távolságát nemcsak a falra szerelt csuklók határozzák meg. Ha a csuklók távolsága csak egy kicsit is eltér a megszabottól, ismeretlen nagyságú feszítő erők lépnek fel. Ezt és az ehhez hasonló buktatókat általában elkerülhetjük, ha feltesszük, hogy a vizsgált feladatban a rudakat csuklók kötik össze.

A sztatikailag határozatlan feladat egyből határozottabbá válik, ha a rudakat nem tekintjük merevnek, a köteleket nyújthatatlannak. Ez azonban már a rugalmasságtan – matematikailag bonyolultabb, fizikailag mélyebb tartalmú – egyenleteihez vezet.

Javasolt irodalom: *Feynman:* Mai fizika 1., *K. M. L.* 1970. 4. sz. 860., 1971. 2. sz. 914., 1971. 3. sz. 921., 1971. 4. sz. 939. feladat megoldása. *Vermes Miklós:* Fizikai versenyfeladatok II.