Megoldás. Az a_i, b_i sorozatok számtani sorozatok; így első k tagjuk összege

$$s(k)=a_1+a_2+\ldots+a_k=k\frac{a_1+a_k}{2}=k\frac{1+1+2(k-1)d}{2}=k+k(k-1)d,$$

amiből külön számolás nélkül $t(k)$ értéke is kiolvasható, ha $s(k)$-ban d helyére $d/2$-t írunk:

$$t(k)=k+k(k-1)\frac{d}{2}.$$

Mivel d természetes szám, az a_i, b_i sorozatok tagjai, és ezek összegei is természetes számok, így joggal beszél a feladat e sorozatok első $t(n)$, illetve első $s(n)$ tagjának az összegéről.

Mivel A_{n+1} az a_i sorozat első $t(n+1)$, és A_n az a_i sorozat első $t(n)$ tagjának az összege, és $t(n)<t(n+1)$, azért az $A_{n+1}-A_n$ különbség egyenlő az a_i sorozatnak a $\big(t(n)+1\big)$-edik tagjától a $t(n+1)$-edik tagjáig terjedő szeletében levő tagok összegével. Ez az összeg – ismét a számtani sorozat összegére vonatkozó ismert tétel szerint – egyenlő a két szélső tag számtani közepének – jelöljük ezt S_n-nel – és a tagok számának a szorzatával. A tagok száma $t(n+1)$ és $t(n)$ különbsége, ami nem más, mint b_{n+1}. Eszerint

$$A_{n+1}-A_n=S_n\cdot b_{n+1},$$

ahol

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}(a_{t(n)+1}+a_{t(n+1)})=\frac{1}{2}\Big[\big(1+2t(n)\cdot d\big)+\big(1+2\big(t(n+1)-1\big)\cdot d\big)\Big]=\\&=1+\big[t(n)+t(n+1)-1\big]d=1+\left[n+n(n-1)\frac{d}{2}+n+n(n+1)\frac{d}{2}\right]\cdot d=\\&=1+2nd+n^2d^2=(1+nd)^2=b_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Emiatt $A_{n+1}-A_n=b_{n+1}^3$, ami valóban egy természetes szám köbe. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$B_{n+1}-B_n=T_n\cdot a_{n+1},$$

ahol T_n a b_i sorozat $\big[s(n)+1\big]$-edik és $s(n+1)$-edik tagjának a számtani közepe:

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{2}(b_{s(n)+1}+b_{s(n+1)})=\frac{1}{2}\Big[1+s(n)\cdot d+1+\big(s(n+1)-1\big)\cdot d\Big]=\\&=1+\big[s(n)+s(n+1)-1\big]\cdot\frac{d}{2}=1+\big[n+n(n-1)\cdot d+n+n(n+1)\cdot d\big]\cdot\frac{d}{2}=\\&=1+nd+n^2d^2.\end{aligned}$$

Emiatt

$$B_{n+1}-B_n=(1+nd+n^2d^2)(1+2nd)=(nd)^3+(1+nd)^3,$$

ami valóban két köbszám összege.

Megjegyzések. 1. Eredményeink így is kimondhatók:

$$A_{n+1}-A_n=b_{n+1}^3,\qquad\qquad B_{n+1}-B_n=b_{n+1}^3+(b_{n+1}-1)^3,$$

ezek különbségéből pedig, bevezetve a $C_k=B_k-A_k$ jelölést:

$$(B_{n+1}-A_{n+1})-(B_n-A_n)=C_{n+1}-C_n=(b_{n+1}-1)^3=(nd)^3,$$

vagyis az így értelmezett C-sorozatban is bármely két egymás utáni tag különbsége egyenlő egy természetes szám köbével.

Garay Barnabás (Sopron, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.)

2. A legegyszerűbb speciális esetben $d=1$ és a két számtani sorozat:

$$1,3,5,7,9,\ldots,\qquad\text{ill.}\qquad 1,2,3,4,5,\ldots$$

Ezekből a megoldásban említett szeleteket külön sorokba írva és a sorokból háromszög alakú táblázatokat alakítva, két közismert érdekességet kapunk: a bal oldali táblázat minden egyes sorának összege köbszám, a jobb oldali táblázatban pedig két egymás utáni köbszám összegét kapjuk minden egyes sor számainak összegeként.

$$\begin{array}{ccccccc} &&&1&&& \\ &&3&&5&& \\ &7&&9&&11& \\ 13&&15&&17&&19 \\ .&.&.&.&.&.&. \end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccccccc} &&&1&&& \\ &&2&3&4&& \\ &5&6&7&8&9& \\ 10&11&12&13&14&15&16 \\ .&.&.&.&.&.&. \end{array}$$