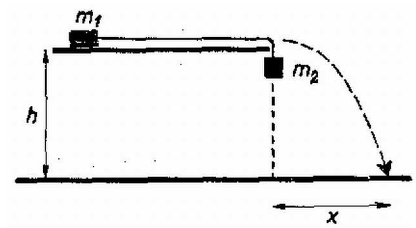
Az I. forduló feladatai

1. *A padló fölött $h = 1$ m magasan levő vízszintes lemezen $m_1 = 4$ kg tömegű test van (1. ábra). A hozzá kötött hosszú fonál másik végén, közvetlenül a lemez szélénél $m_2 = 1$ kg tömegű test lóg. A súrlódás elhanyagolható. A testeket elengedjük. Egymástól milyen távolságban érik el a testek a padlót?*



1. ábra

Megoldás. Először egyenletesen gyorsuló mozgás jön létre $a = gm_2/(m_1 + m_2)$ gyorsulással. Az m_2 tömeg földre érésének ideje:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2}}.$$

Ezalatt az m_1 tömeg által elért végsebesség:

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}}.$$

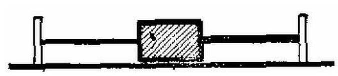
Ezután m_1 számára vízszintes hajítás következik, ennek ideje h magasságból $t_1 = \sqrt{2h/g}$, ezalatt a v sebességgel megtett út:

$$x = vt_1 = \sqrt{2gh \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2h\sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Ez az eredmény g-től független. A mi számadatainkkal $x = 2\sqrt{5}/5$ m $= 0{,}896$ m.

Megvizsgálható, hogy miközben az m_1/m_2 tömegviszony 0-tól ∞-ig változik, az x $2h$-tól 0-ig változik.

2. 20 kg *tömegű test vízszintes, súrlódásmentes síkon fekszik két gumifonál között (2. ábra). A gumiszálak nyúlása arányos a húzóerővel, a baloldalit* 0,32 kp *erő, a jobboldalit* 0,72 kp *erő képes* 1 cm-*rel megnyújtani. Kezdetben a fonalak eredeti hosszúságúak. A testet* 3 cm-*rel balra húzzuk, azután elengedjük. Ismertessük a mozgás lefolyását! Rajzoljuk meg az úttörvény grafikonját!* $g = 10\ m/s^2$.



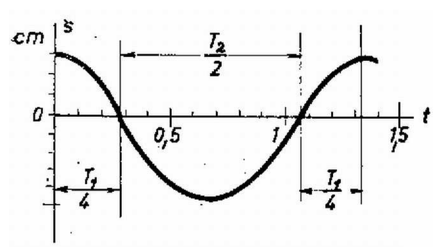
2. ábra

Megoldás. Először a jobboldali, az erősebb fonál hoz létre egy negyed rezgést, amelyre nézve $F = m\omega_1^2 s$. Ide 7,2 newton erőt, 0,01 m-t és 20 kg-ot helyettesítve a szögsebesség és rezgésidő $\omega_1 = 6\mathrm{s}^{-1}$, $T_1 = 1{,}05$ s.

A középhelyzetbe a tömeg $v_1 = \omega_1 r_1 = 6 \cdot 0{,}03$ m/s $= 0{,}18$ m/s sebességgel érkezik.

Ezután a baloldali, a gyengébb gumifonál hoz létre egy fél rezgést, amelyre nézve $3{,}2\mathrm{N} = 20\ \mathrm{kg} \cdot \omega_2^2 \cdot 0{,}01$ m. Ennek a második rezgésnek a szögsebessége és rezgésideje $\omega_2 = 4\ \mathrm{s}^{-1}$, $T_2 = 1{,}57$ s. Ennek a rezgésnek az indulási sebessége az előbbivel egyező: $0{,}18\ \mathrm{m/s} = \omega_2 r_2$, innen a második rezgés amplitudója $r_2 = 0{,}045$ m $= 4{,}5$ cm.

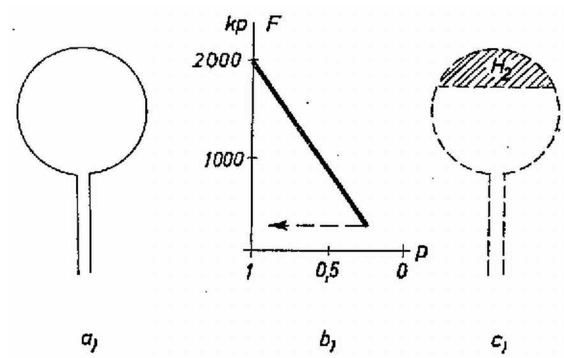
A kiszámított adatokkal megrajzolható az úttörvény grafikonja (3. ábra).



3. ábra

A teljes rezgésidő $T = (T_1 + T_2)/2 = 1{,}31$ s.

3. 15,64 méter *átmérőjű, formáját tartó léggömb alul csövön érintkezik a külső levegővel (4. ábra a rajza). A léggömb hidrogéntöltéssel indul. Mennyi a léggömb emelő ereje a) a tenger szintjén, b)* 5400 m *magasra emelkedve, ahol a légnyomás* 0,5 *atmoszféra, c)* 10 800 méter *magasra emelkedve, ahol a légnyomás* 0,25 atmoszféra*? Ha a léggömb ebből a magasságból ismét az előbbi magasságokba kerülne, mennyi volna ott az emelő erő? A burkolat minden* m^2*-e* 0,547 kp *súlyú. A tenger szintjén a levegő fajsúlya* 1,3 kp/m^3*, a hidrogén fajsúlya* 0,09 kp/m^3*. A hőmérséklet változatlan.*



4. ábra

Megoldás. A gömb térfogata $4\pi r^3/3 = 2000$ m^3, a burkolat súlya $G = 4\pi r^2 \cdot 0{,}547$ $kp/m^2 = 420$ kp. Felfelé menet a gömbben levő hidrogén súlya és a kiszorított levegő súlya a nyomással arányosan csökken, tehát az emelő erő $F = (1{,}3 - 0{,}09)$ $kp/m^3 (p/p_0)V - G = [2420(p/p_0) - 420]$ kp. Az adatok áttekintése:

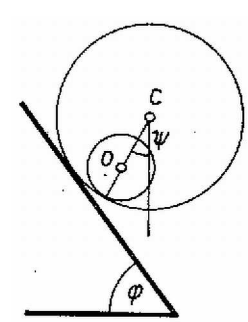
p	G	hidrogén súly	összsúly	levegő súlya	F
1 atm	420 kp	180 kp	600 kp	2600 kp	2000 kp
0,5 atm	420 kp	90 kp	510 kp	1300 kp	790 kp
0,25 atm	420 kp	45 kp	465 kp	650 kp	185 kp

Az emelőerő függését a nyomástól a 4. ábra b) rajza mutatja.

Ha a léggömb lefelé megy, akkor az emelő erő ugyanannyi marad, amennyi a legmagasabb helyzetében volt (szaggatott vonal). Ugyanis az összehúzódó térfogat helyébe ekkor levegő tódul be. Tekintsük most léggömbnek a burkolatot és az elkülönítve képzelt hidrogént (c) rajz). Érthető, hogy a hidrogén súlya és a kiszorított levegő súlya változatlan marad.

A II. forduló feladatai

1. *Belül üres,* $r_1 = 1$ méter *sugarú,* $m_1 = 670$ gramm *tömegű abroncs* $\varphi = 53°08'$*-es hajlásszögű lejtőn gurul le. Belsejében* $r_2 = 0{,}3$ méter *sugarú,* m_2 *tömegű tömör henger a mozgás folyamán az abroncshoz viszonyítva ugyanazt a helyzetét tartja meg úgy, hogy a két tengelyt (az 5. ábrán O és C középpontokat) összekötő egyenes a függőlegessel* $\psi = 36°52'$*-es szöget zár be. Mindenütt csúszás nélküli gördülés van. Mekkora a tömör henger tömege?*



5. ábra

Megoldás. Mindkét tárgy középpontja ugyanazzal az a lejtővel párhuzamos gyorsulással mozog. Ezért és a sima legördülés folytán a szögsebességek:

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1}, \qquad \omega_2 = \frac{v}{r_2}.$$

A szöggyorsulások

$$\beta_1 = \frac{a}{r_1}, \qquad \beta_2 = \frac{a}{r_2}.$$

(v a középpontok lejtővel párhuzamos pillanatnyi sebessége.)
A tehetetlenségi nyomatékok:

$$\Theta_1 = m_1 r_1^2, \quad \Theta_2 = 0{,}5 m_2 r_2^2.$$

A hengerre ható forgatónyomaték a forgó mozgás törvénye szerint:

$$\Phi_2 = \beta_2 \Theta_2 = \frac{a}{r_2} \cdot \frac{m_2 r_2^2}{2} = \frac{a m_2 r_2}{2}. \tag{0}$$

A középpontok egyenlő a gyorsulására például az energiatételből kaphatunk egy összefüggést. s magasságból leérve a nehézségi erő munkavégzése $(m_1 + m_2) g \cdot s \cdot \sin\varphi$. Az eközben megszerzett mozgási energia:

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{\Theta_1 \omega_1^2}{2} + \frac{\Theta_2 \omega_2^2}{2} =$$
$$= \frac{v^2}{2} \cdot \left[m_1 + m_2 + \frac{m_1 r_1^2}{r_1^2} + \frac{m_2 r_2^2}{2 r_2^2} \right] = \frac{v^2}{2} \cdot (2m_1 + 1{,}5 m_2) = as(2m_1 + 1{,}5m_2),$$

mert egyenletesen gyorsuló mozgásnál $v^2 = 2as$. Egyenlővé tesszük a nehézségi erő munkavégzését a megszerzett mozgási energiával:

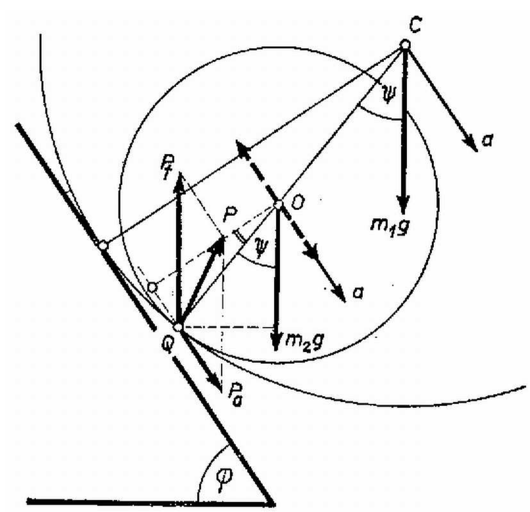
$$(m_1 + m_2) g \cdot s \sin\varphi = as(2m_1 + 1{,}5m_2).$$

Innen a gyorsulás:

$$a = g \cdot \frac{(m_1 + m_2)\sin\varphi}{2m_1 + 1{,}5m_2}. \tag{I.}$$

A rádiuszok nem szerepelnek, de ψ szögről sincs még szó.

A henger viselkedésével foglalkozva a gyorsulásra egy másik összefüggést is levezetünk (6. ábra).



6. ábra

A hengerre két erő hat: $m_2 g$ súlya és az abroncs részéről P erő Q pontban. E két erő eredőjének O-ban a lejtővel párhuzamos gyorsulást kell okoznia, és forgatónyomaték-eredőjüknek a (0) szerinti Φ_2-nek kell lennie. A Q-ban támadó P erőt felbontjuk a lejtővel párhuzamos P_a és a függőleges P_f összetevőkre. P_f-nek $m_2 g$-vet kell egyenlőnek lennie (különben az eredő nem eshetne a-ba). O-ban felveszünk $\pm P_a$ erőket. A lefelé mutató P_a az $m_2 a$ gyorsító erő, a felfelé mutató és eredeti P_a, valamint a függőleges erők adják a (0) szerinti Φ_2 forgatónyomatékot:

$$\frac{a m_2 r_2}{2} = m_2 g r_2 \sin\psi - m_2 a r_2 \cos(\varphi - \psi).$$

Innen a gyorsulás:

$$a = g \cdot \frac{\sin\psi}{0{,}5 + \cos(\varphi - \psi)}. \tag{II.}$$

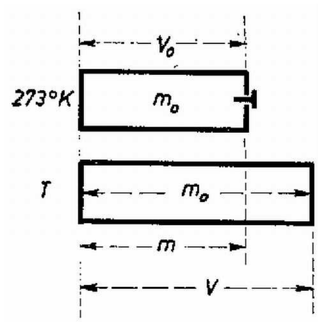
A gyorsulás (I.) és (II.) szerinti eredményeit egyenlővé téve és m_2/m_1 tömeghányadot kifejezve kapjuk az eredményt:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi - 3\sin\psi + 2\sin\varphi\cos(\varphi - \psi)} - 1.$$

Számadatainkkal $\varphi = 53°08'$, $\psi = 36°52'$. $\sin\varphi = \cos\psi = 0{,}8$, $\cos\varphi = \sin\psi = 0{,}6$. $m_2/m_1 = 8/67$, tehát $m_2 = 80$ gramm, $a = 30\,g/73 = 0{,}411\,g$.

2. 20 m^3*-es zárt tartályban* 0°C*-on* 1 atmoszféra *nyomáson* 26 kg *levegő van, amelyet* 44,2 kcal *hőmennyiséggel lehet* 10 °C*-ra melegíteni. A tartályt olyan szeleppel látjuk el, amely csak kifelé enged levegőt, már a legkisebb túlnyomásnál is. Ebben az esetben mekkora hőmennyiség szükséges ahhoz, hogy a tartályban a művelet végén* 10 °C*-os levegő legyen? A falakon át történő hőveszteség elhanyagolható.*

Megoldás. Melegítés közben levegő hagyja el a tartályt, amely levegőt a továbbiak folyamán már nem kell melegíteni. Keressük a tartályban levő levegő tömegét mint az abszolút hőmérséklet függvényét (7. ábra).



7. ábra

Kezdetben m_0 tömeg V_0 térfogaton volt 273 °K hőmérsékleten. Állandó nyomáson kiterjedve T Kelvin hőmérsékleten V lenne a térfogat:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{273}.$$

Ha az eredeti m_0 tömeg T fokon V térfogatot tölt be, akkor az eredeti V_0 térfogatra m tömeg jut:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{273}{T}.$$

Tehát a tartályban levő tömeg mint a pillanatnyi hőfok függvénye:

$$m = \frac{273 m_0}{T}.$$

A tartályban levő levegőtömeg $\mathrm{d}T$ hőmérséklettel való felmelegítéséhez szükséges hőmennyiség az állandó nyomás melletti fajhő felhasználásával:

$$\mathrm{d}Q = c_p m \mathrm{d}T = c_p \cdot 273 \cdot m_0 \cdot \frac{1}{T} \cdot \mathrm{d}T.$$

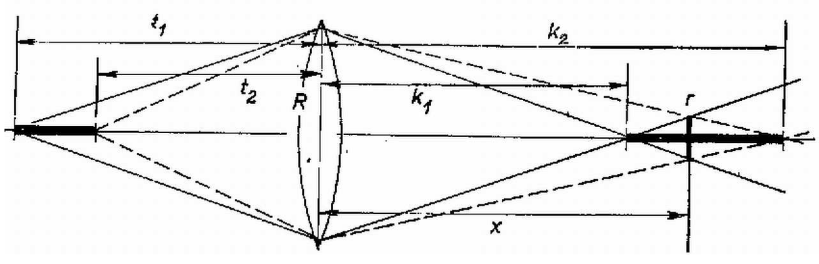
Az egész felmelegítéshez szükséges hőmennyiség:

$$Q = 273 \cdot m_0 \cdot c_p \cdot \int_{273}^{283} \frac{\mathrm{d}T}{T} = 273 m_0 c_p \ln\frac{283}{273}.$$

Feladatunkban $c_v = \dfrac{44{,}2}{26 \cdot 10} = 0{,}17$ kcal/kg · fok, $x = 1{,}4$, $c_p = 0{,}238$ kcal/kg · fok. Az eredmény $Q = 61{,}40$ kcal. Ha a tartály zárt volna és az egész levegőmennyiséget kellene felmelegíteni, ehhez csak 44,2 kcal volna szükséges.

3. $2R = 4$ cm *átmérője,* 40 cm *gyújtótávolságú gyűjtőlencse tengelyében egy* 20 cm *hosszú, világító fénycső fekszik; közelebbi vége* 60 cm*-re, távolabbi vége* 80 cm*-re van a lencsétől. A lencse túlsó oldalán, a tengelyre merőlegesen felfogó ernyőt helyezünk el. Hová helyezzük ezt az ernyőt, hogy a fényfolt átmérője a lehető legkisebb legyen, és mekkora ez az átmérő?*

Megoldás. A tengelyben fekvő fénycső képpontjai szintén a lencse tengelyében feküsznek (8. ábra).



8. ábra

A legszűkebb fénykeresztmetszet a lencsétől x távolságban jön létre, átmérője $2r$. A fénycső t_1 és t_2 távolságban levő végeinek képtávolságai:

$$k_1=\frac{t_1 f}{t_1-f},\qquad k_2=\frac{t_2 f}{t_2-f}.$$

Hasonló háromszögekből:

$$\frac{r}{x-k_1}=\frac{R}{k_1},\qquad \frac{r}{k_2-x}=\frac{R}{k_2}.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása x-re, r-re:

$$x=\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2},\qquad r=R\cdot\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}.$$

Felhasználva a képtávolságok előbb kiszámított értékeit:

$$x=\frac{2t_1t_2f}{2t_1t_2-(t_1+t_2)f},\qquad r=R\cdot\frac{(t_1-t_2)f}{2t_1t_2-(t_1+t_2)f}.$$

A fényeső képének hossza $k=k_2-k_1=\dfrac{tf^2}{(t_1-f)(t_2-f)}$.

A mi számadatainkkal $x=96$ cm, $r=0{,}4$ cm, $k=40$ cm.

Az 1971. évi fizika tanulmányi verseny eredménye

I. díj *Bajmóczy Ervin* (Budapest, Fazekas M. Gimn. IV. o. t., Tanára: Hubay Ferenc).
II. díj *Mosó Tamás* (Budapest, Eötvös J. Gimn., IV. o. t. Tanára: Zentai Károly).
III. díj *Szabó Zoltán* (Budapest, Apáczai Csere J. Gimn. III. o. t. Tanára: Turtóczky Sándor).

A további helyezettek: 4. *Boros Endre* (Budapest, I. István Gimn., III. o. t., Tanára: Moór Ágnes); 5. *Iglói Ferenc* (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t., Tanára: Simon Sándor); 6. *Véner Péter* (Budapest, Kaffka M. Gimn., IV. o. t., Tanára: Jánosi Ilona); 7. *Lázár András* (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t., Tanára: Fehér László); 8. *Kövér András* (Debrecen, Kossuth L. Gimn., III o. t., Tanára: Czirják Lászlóné); 9. *Postásy Csaba* (Budapest, Petőfi S. Gimn., IV. o. t.; Tanára: Szondi Lajos); 10. *Hámori Iván* (Budapest, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.).