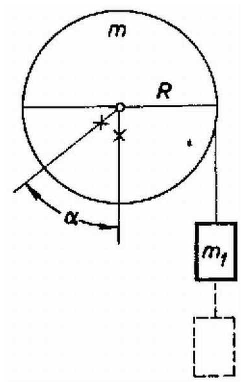
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 17-én rendezte 47. versenyét Budapesten és 7 vidéki városban az idén érettségizettek és a középiskolások részére. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Ismertetjük a verseny feladatait, megoldásaikat és a nyertesek névsorát.

1. *Egyenes körhenger fele ezüstből, fele alumíniumból készült, ezért súlypontja az $R = 10\,\mathrm{cm}$-es rádiusz középponttól mért negyedében van. A henger tengelyét vízszintesen csapágyazzuk és abban a helyzetben, amikor súlypontja a legmélyebben van, a kerületére csavart fonál végére egy tömeget akasztunk, azután a szerkezetet elengedjük. Mennyi a henger szögsebessége egy teljes fordulat után, ha a lelógó m_1 tömeg*

a) a henger m tömegével egyenlő,

b) a henger tömegének nyolcada?

Megoldás. A henger és a lelógó tömeg helyzetét α elfordulási szöggel adjuk meg (1. ábra).

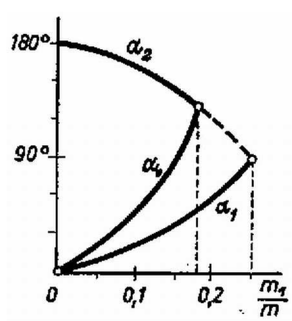


1. ábra

Először keressünk sztatikus egyensúlyi helyzetet, amikor egy bizonyos α szög mellett a forgatónyomatékok egyenlők. Ennek feltétele:

$$mg \cdot \frac{R}{4} \cdot \sin\alpha = m_1 g R.$$

Ebből az egyensúlyi helyzet feltétele: $\sin\alpha = 4m_1/m$. Ilyen sztatikus egyensúlyi helyzet addig van, amíg $m_1/m \leqq 1/4$. Az α_1 hegyesszöghöz tartozó egyensúlyi helyzet stabilis, az α_2 tompaszöghöz tartozó labilis. Például $m_1/m = 1/8$ esetében $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 150°$. Ha $m_1/m = 1/4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$. A sztatikus egyensúlyi helyzetek szögét a 2. ábra alsó és felső görbéje mutatja az m_1/m tömegviszony függvényében.



2. ábra

Ha szerkezetünket $\alpha = 0°$-os helyzetéből elengedjük, akkor α szögnyi elfordulás után a lelógó tömeg súlyának munkavégzése $m_1 g\alpha R$. Ebből került ki a henger súlypontjának emeléséhez szükséges $mgR(1-\cos\alpha)/4$ munkavégzés, a henger $\Theta\omega^2/2$ mozgási energiája és a lelógó tömeg $m_1 v^2/2 = m_1 R^2\omega^2/2$ mozgási energiája. Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$m_1 g\alpha R = \frac{mgR(1-\cos\alpha)}{4} + \frac{\Theta\omega^2}{2} + \frac{m_1 R^2\omega^2}{2}.$$

Hengerünk tehetetlenségi nyomatéka egyszerűen $\Theta = mR^2/2$, ezért:

$$m_1 g\alpha R = \frac{mgR(1-\cos\alpha)}{4} + \frac{mR^2\omega^2}{4} + \frac{m_1 R^2\omega^2}{2}.$$

Innen a henger szögsebessége, mint α elfordulási szög függvénye:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\cdot\frac{m_1}{m}\cdot\alpha + \cos\alpha - 1}{2\cdot\frac{m_1}{m} + 1}\cdot\frac{g}{R}}$$

Az a) kérdésre a felelet: ha $m_1/m = 1$, akkor $\alpha = 2\pi$ mellett $\omega = \sqrt{8\pi g/3R} = 28{,}65\ \mathrm{s}^{-1}$

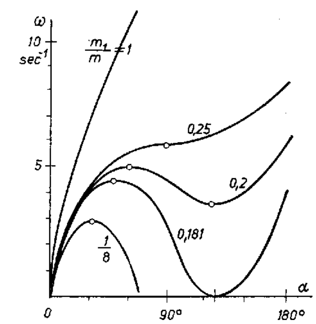
Ha az m_1/m tömegviszony kisebbedik, ω képletében a tört számlálója mindig kisebb lesz és egy bizonyos α_0 szög esetében nulla lesz, ennek feltétele:

$$4 \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \alpha_0 + \cos\alpha_0 - 1 = 0.$$

Egyenletünk közelítéssel oldható meg. A 2. ábra középső görbéje tünteti fel a maximális felemelkedés szögének, α_0-nak az m_1/m tömegviszonytól való függését.

Vizsgáljuk meg a szerkezet viselkedését különböző m_1/m tömeghányadoknál, a kisebbektől a nagyobbak felé haladva. Ha m_1/m elég kicsiny, a henger kezd forogni, a szögsebesség α_1 stabilis egyensúlyi helyzeten áthaladva a legnagyobb, azután lassul és a henger nem éri el α_2 labilis egyensúlyi helyzetet, hanem még előbb visszafordul. Növelve a tömegviszonyt egy bizonyos esetben a henger eléri α_2 felső, labilis egyensúlyi helyzetét, majd ezen át is lendül. A határeset akkor jön létre, ha α_0 egyenlő lesz α_2-vel. Közelítő számítás mutatja, hogy ez $m_1/m = 0{,}181$ tömegviszonynál következik be. Ekkor $\alpha_0 = \alpha_2 = 133{,}5°$.

A felelet b) kérdésre: a henger nem fordul át.



3. ábra

A 3. ábra ω szögsebesség α szögtől való függését mutatja különböző tömegviszonyok esetében. Amíg m_1/m értéke 0,181 és 0,25 között van, a szögsebességnek minimuma van α_2 helyzetben.

2. *A repülőgép állandó sebességű vízszintes repüléséhez szükséges tolóerő $F = k_1 A v^2$. A szárnyfelület által létrehozott emelő erő $Q = k_2 A v^2$. (Q a repülőgép súlya, A a szárnyfelület nagysága, v a sebesség.) A szárnyfelület súlya $k_3 A$, ehhez járul a teher Q_0 súlya. Mekkora teljesítmény kell a repülőgép mozgásban tartásához? Mikor minimális a teljesítmény? Képes-e az ember izomerejével repülni? Ekkor $k_1 = 0{,}001\ \mathrm{kp}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot(\mathrm{m/s})^{-2}$, $k_2 = 25k_1$, $Q_0 = 100$ kp, $k_3 = 2\ \mathrm{kp/m}^2$.*

Megoldás. A teljesítmény az erő és a sebesség szorzata, a repülőgép esetében $P = Fv = k_1 A v^3$. De itt az A szárnyterület és a v sebesség nem függetlenek egymástól, mert az emelő erőnek a gép $Q_0 + k_3 A$ súlyával kell egyenlőnek lennie:

$$Q_0 + k_3 A = k_2 A v^2.$$

Ebből kifejezhető a szükséges szárnyterület mint a sebesség függvénye:

$$A = \frac{Q_0/k_2}{v^2 - k_3/k_2}.$$

Ezt felhasználva a teljesítmény kifejezésében, a teljesítményt mint a sebesség függvényét kapjuk meg:

$$P = \frac{k_1 Q_0}{k_2} \cdot \frac{v^3}{v^2 - k_3/k_2}.$$

A sebesség szerint differenciálva keressük a teljesítmény minimumát:

$$\frac{k_2}{k_1 Q_0} \cdot \frac{dP}{dv} = \frac{3v^2(v^2 - k_3/k_2) - 2v^4}{(v^2 - k_3/k_2)^2}.$$

A differenciálhányados eltűnése a minimum szükséges feltétele:

$$3(v^2 - k_3/k_2) - 2v^2 = 0.$$

Az a sebesség, amely mellett a repülés minimális teljesítményű:

$$v = \sqrt{\frac{3k_3}{k_2}}.$$

Ebben az esetben a szárnyfelület területe:

$$A = \frac{Q_0/k_2}{3k_3/k_2 - k_3/k_2} = \frac{Q_0}{2k_3},$$

illetve $Q_0 = 2k_3A$, vagyis a minimális teljesítmény esetében a szárny súlya a teher súlyának a fele. A minimális teljesítmény:

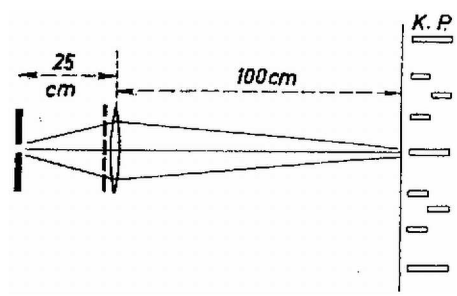
$$P = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{3Q_0}{2}\sqrt{\frac{3k_3}{k_2}}.$$

A mi adatainkkal a szárny területe 25 m^2, az egész repülőgép súlya 150 kp, a tolóerő 6 kp, a sebesség 15,49 m/s = 55,6 km/óra, a teljesítmény 92,9 mkp/s = 910 watt = 1,24 **LE**. Az emberi izomerővel aligha vagyunk képesek repülni. Táblázatunk a teljesítmény minimumának kialakulását mutatja.

A m^2	Q kp	v m/s	F kp	P mkp/s
10	120	21,9	4,8	104
15	130	18,6	5,2	96,8
20	140	16,7	5,6	93,6
25	150	15,49	6,0	92,9
30	160	14,6	6,4	93,8
35	170	13,9	6,8	94,2

3. 0,5 mm *széles rést* 20 cm*-es gyújtótávolságú lencsével a lencsétől* 100 cm*-re levő ernyőre képezünk le olyan fénnyel, amely* 0,4 μ *hullámhosszúságú kék és* 0,6 μ *hullámhosszúságú piros fény keveréke. A lencsére* 0,04 mm *rácsállandójú optikai rácsot helyezünk. Mit látunk az ernyőn?*

Megoldás. A rés leképezésekor a tárgytávolság 25 cm, a képtávolság 100 cm, a lineáris nagyítás 4-szeres, és a rés képe 2 mm széles sáv (4. ábra).



4. ábra

Ezt a képet a kék és piros fény keveréke alkotja, tehát bíbor színűnek látjuk. Azok az irányok, amelyekben a rács erősítést ad: $\sin\alpha = n\lambda/d$, ahol λ a hullámhossz, d a rácsállandó és n egész szám. Adatainkkal a kék fény számára $\sin\alpha = 0{,}01n$, a piros fény számára $\sin\alpha = 0{,}015n$. Tekintettel a 100 cm-es ernyőtávolságra a kék fény erősítései 10 mm-es, a piros fény erősítései 15 mm-es távolságokban következnek egymás után. Minden harmadik kék és minden második piros erősítés ugyanarra a helyre. esik és bíbor színt ad.

A verseny eredménye. I. díjat nyertek *Blahó Gábor* (a budapesti Eötvös Gimnázium IV. o.-ban Zentai Károly tanítványa) és *Harmat Péter* (a budapesti ELTE-TTK fizikus hallgatója, tavaly a mosonmagyaróvári Kossuth Gimnáziumban Krajnik József tanítványa volt). II. díjat nyertek *Bajmóczy Ervin* IV. o. t. (a budapesti Fazekas Gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa) és *Tichy-Rács Ádám* IV. o. t. (a budapesti Eötvös Gimnáziumban Zentai Károly tanítványa). III. díjat nyert *Mosó Tamás* IV. o. t. (a budapesti Eötvös Gimnáziumban Zentai Károly tanítványa). Dicséretet kaptak: *Füredi Gábor* IV. o. t. (a budapesti Móricz Gimnáziumban Fehér László tanítványa), *Horváthy Péter* (a budapesti ELTE-TTK matematikus hallgatója, tavaly a budapesti Fazekas Gimnáziumban Mihály István tanítványa), *Láz József* (a budapesti ELTE-TTK fizikus hallgatója, tavaly a budapesti Eötvös Gimnáziumban Kellner Dénes tanítványa) és *Sánta Imre* IV. o. t. (a szegedi Radnóti Gimnáziumban Simon Sándor tanítványa).