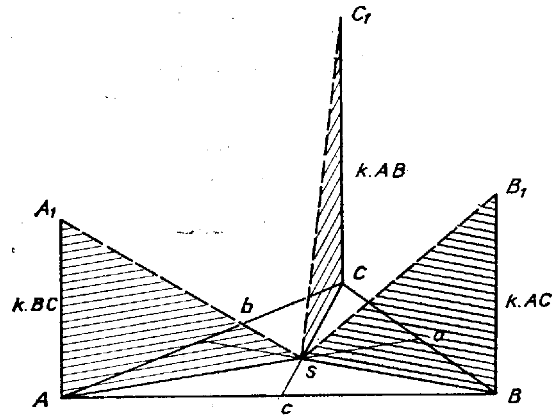
Megoldás. Fel fogjuk használni, hogy az x, y, z oldalakkal szerkesztett háromszög x oldalához tartozó s_x súlyvonal négyzete – mint alább megmutatjuk – $s_x^2=(2y^2+2z^2-x^2)/4$, másrészt, hogy a súlypont távolsága az y és z oldalak közös végpontjától $2s_x/3$.

Legyen az ABC háromszög súlypontja S, oldalainak hossza $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ (1. ábra).



1. ábra

Így az $SA_1=SB_1$ követelményből $SA^2+AA_1^2=SB^2+BB_1^2$, azaz

$$\frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}+k^2a^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{9}+k^2b^2,$$

rendezve

$$k^2(a^2-b^2)=\frac{a^2-b^2}{3},$$

ennek $a\neq b$ esetén csak $k=1/\sqrt{3}$ felel meg $(k>0)$, $a=b$ esetén pedig bármely pozitív k.

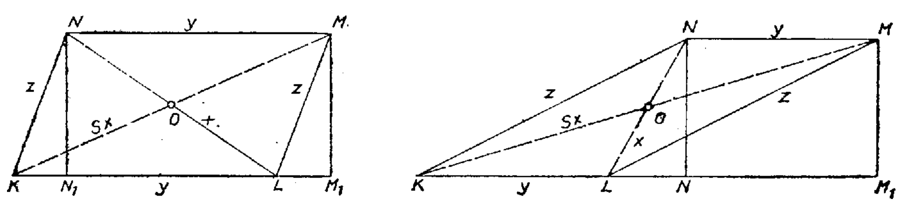
A talált k értékkel

$$SA_1^2=SB_1^2=\frac{2}{9}\,(a^2+b^2+c^2),$$

és ugyanekkora hasonlóan SC_1^2 is. Tehát $k=1/\sqrt{3}$ az egyetlen megfelelő érték, ha az ABC háromszögnek van két különböző oldala, ha pedig a háromszög szabályos, akkor nyilvánvalóan bármely k érték megfelel. A kérdéses távolság

$$\frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

A felhasznált képlet levezethető ebből: a $KLMN$ paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő átlóinak négyzetösszegével (2. ábra).



2. ábra

Legyen $LKN\sphericalangle\le 90^\circ$ és N, M vetülete a KL egyenesen N_1, M_1, így $KN_1=LM_1$ és $MM_1=NN_1$, tehát $KM^2+LN^2=(KL+LM_1)^2+MM_1^2+(KL-KN_1)^2+NN_1^2=2\,KL^2+2(LM_1^2+MM_1^2)=KL^2+MN^2+LM^2+NK^2$.

Ha ugyanis még az oldalak $KL=MN=y$, $KN=LM=z$, az átlók metszéspontja O, akkor $KO=s_x=KM/2$ a KLN háromszög $LN=x$ oldalához tartozó súlyvonal, és $4s_x^2+x^2=2y^2+2z^2$, ebből fejeztük ki fönt s_x-et.

Grácin Edit (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)