Az ötszögekre tett előírások szerint a tengelyek valóban négyzethálót adnak, hiszen e háló egy szemének a szomszédos oldalai egyenlőek és merőlegesek egymásra. A négyzeteket az ötszögek oldalai négy egybevágó és egymáshoz képest 90–90°-kal elfordult részre vágják, így a négyzetek belsejében levő ötszög-csúcsok (pl. K) a négyzeteknek centrumai.

a) Válasszuk egységnek a négyzetháló oldalait, és jelöljük a DCF szöget α-val, D-nek a CF egyenesen levő vetületét D_0-lal. A DD_0C derékszögű háromszögben

$$D_0C = \operatorname{ctg}\alpha, \quad DC = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \text{így } ED = 1 - D_0C = 1 - \operatorname{ctg}\alpha,$$

és az $ABCDEF$ hatszög kerülete

$$k(\alpha) = 2ED + 4DC = 2(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \frac{4}{\sin\alpha} = 2 + 2\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Ha ez a változó α-nak valamilyen α_0 értéke mellett minimális, ott a $k(\alpha)$ függvény

$$k'(\alpha) = 2\frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha(2-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = 2\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

deriváltja 0-val egyenlő, azaz $\cos\alpha_0 = 1/2$, és ez – mivel $0 < \alpha < 90°$ – csak $\alpha_0 = 60°$ mellett teljesül.

Ha viszont a CGJ háromszög szabályos, akkor $\alpha = 180° - KCJ\sphericalangle - JCG\sphericalangle = 180° - 45° - 60° = 75°$, ekkor tehát a hatszög kerületének nincs minimuma, a feladatbeli állítás nem igaz. (Figyelembe vettük azt is, hogy $\alpha_0 = 60°$ az értelmezési tartománynak belső pontja.)

b) A $CGHJK$ ötszög négy oldala a követelmény szerint egyenlő, így ez az ötszög akkor egyenlő oldalú, ha CG oldala is egyenlő a többiekkel. Jelöljük a CJ' szakasz hosszát x-szel, akkor $CG = 2x$, $\quad CK = DC/2 = \sqrt{1+(1-2x)^2}/2$, eszerint x a

$$2x = \frac{1}{2}\sqrt{2-4x+4x^2} \tag{1}$$

egyenlet gyöke. Négyzetreemeléssel, rendezéssel $6x^2 + 2x - 1 = 0$, s mivel az állandó tag negatív, a gyökök valósak és ellentett előjelűek. Számunkra csak a pozitív gyök:

$$J'C = x = \frac{\sqrt{7}-1}{6} (= 0{,}2743)$$

használható, és ez ki is elégíti (1)-et. Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Mivel $0 < \alpha < 60°$ mellett $k'(\alpha) < 0$, és $60° < \alpha < 90°$ mellett $k'(\alpha) > 0$, azért $k(\alpha)$-nak a $0 < \alpha < 90°$ szakaszon $\alpha_0 = 60°$ mellett valóban minimuma van. Ekkor az $ABCDEF$ hatszög mindegyik szöge 120°-os.

2. Talán a most mondott eredmény tévesztette meg a feladatban említett személyt. Egyébként beszélhetett volna az ötszöglap kerületéről is, hiszen ez éppen a fele a hatszög kerületének.

3. A feladat állításának ellenőrzésére több más lehetőség is van, más méretet választva független változónak. Vázolunk két ilyet tanulságul, ajánljuk teljes kidolgozásukat és összehasonlításukat a fenti megoldással.

(I.) Változónak véve az állítás szerint 60°-kal egyenlő $x = GCJ\sphericalangle$-et, hosszegységnek pedig a négyzet oldalát, a hatszög kerülete

$$k(x) = \frac{4(\sqrt{2}+\cos x)}{\cos x + \sin x},$$

deriváltja eredetileg elég bonyolult, és értéke $x = 60°$ esetén $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 4 < 0$, tehát nincs minimum. (Könnyű ezeket hozzátenni: E helyen csökken a $k(x)$, a minimum tehát nagyobb x-nél várható. A derivált számlálója kellő rendezéssel $8[\sin(x-45°) - \sin 30°]$, innen a (valódi) minimum helye $x = 75°$, ebből pedig $\alpha = 180° - 75° - 45° = 60°$.)

(II.) Ha pedig $x = J'C$ a független változó, akkor

$$k_1(x) = 4x + 8\sqrt{x^2 - 2x + 2},$$

a számítás még hosszabb, mert meg is kell oldani a $k_1'(x) = 0$ négyzetgyökös egyenletet, ki kell választani a két pozitív gyök közül azt, amelyik valóban szóba jön, ellenőrizni a minimum létezését, végül x ezen értékéből kiszámítani a GCJ szöget.

Az ajánlott összehasonlítást végrehajtva példát lát az olvasó, körülbelül mire gondoljon, ha egy versenybizottsági jelentés egyszerű és bonyolultabb megoldásokat említ.