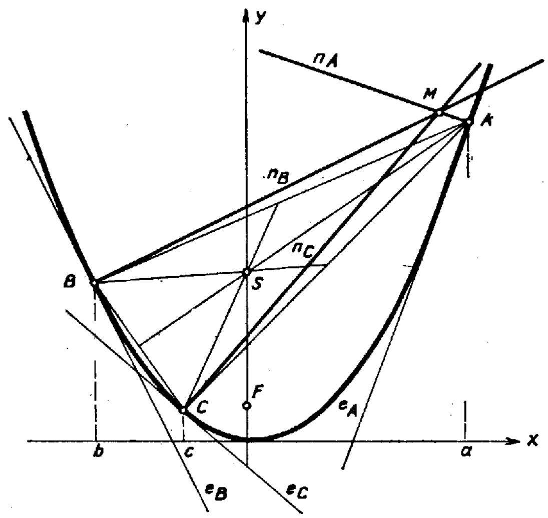
Bármely két parabola hasonló egymáshoz, ezért elég az $y = x^2$ egyenletű p parabolát tekintenünk. Legyen A, B, C abszcisszája rendre a, b, c, ekkor ordinátáik a^2, b^2 ill. c^2 és $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ elegendő feltétele annak, hogy A, B és C különböző pontok legyenek, mert p-nek minden, a tengelyével párhuzamos egyenesen pontosan egy pontja van.

p tetszőleges (x_1, x_1^2) pontjában az érintő iránytangense az $(x^2)' = 2x$ derivált értéke e helyen, azaz $2x_1$, a normálisé pedig $-1/(2x_1)$, (hacsak $x_1 \neq 0$), így a normális egyenlete az egy előírt ponton átmenő, előírt irányú egyenes egyenlettípusa alapján

$$y - x_1^2 = -\frac{1}{2x_1}(x - x_1), \text{ rendezve}$$

$$x + 2x_1 y - 2x_1^3 - x_1 = 0. \tag{1}$$

Ha pedig $x_1 = 0$, vagyis a pont éppen a p csúcsa, akkor a normális az y tengely, egyenlete $x = 0$, az átrendezett (1) alak már ezt is tartalmazza. p-nek bármely két különböző pontjához tartozó normálisa metszi egymást egyetlen pontban, mert iránytangenseik különbözők.



Annak feltételét keressük, hogy a kérdéses 3 normális, n_A, n_B, n_C közül az első kettőnek a metszéspontja egybeessék az első és a harmadik metszéspontjával. (1)-ben x_1 helyére rendre a-t, ill. b-t írva

$$n_A \text{ egyenlete} \qquad x + 2ay - 2a^3 - a = 0,$$
$$n_B \text{ egyenlete} \qquad x + 2by - 2b^3 - b = 0,$$

innen M metszéspontjuk koordinátái, figyelembe véve, hogy $b \neq a$,

$$y_M = a^2 + ab + b^2 + \frac{1}{2}, \qquad x_M = -2ab(a+b).$$

Ebből n_A és n_C-nek M' metszéspontja koordinátáit úgy kapjuk, hogy b helyére c-t írunk:

$$y_{M'} = a^2 + ac + c^2 + \frac{1}{2}, \qquad x_{M'} = -2ac(a+c).$$

A 3 normális akkor megy át egy ponton, ha M' azonos M-mel, hiszen ekkor ez a pont rajta van n_B-n is, n_C-n is, tehát egyben n_B és n_C metszéspontja.

M' akkor és csakis akkor esik egybe M-mel, ha teljesül $y_{M'} = y_M$, hiszen egyetlen normális sem párhuzamos az x tengellyel, bármelyik normálison az ordináta egyértelműen meghatározza az abszcisszát, tehát a mondott feltétel maga után vonja $x_{M'}$, és x_M egyenlőségét is. Mármost $y_M = y_{M'}$, ha $y_M - y_{M'} = a(b-c) + b^2 - c^2 = (b-c)(a+b+c) = 0$, és ez, mivel $(b-c) \neq 0$, akkor és csak akkor teljesül, ha

$$a + b + c = 0. \tag{2}$$

Ez, mint ismeretes, azt jelenti, hogy az ABC háromszög S súlypontja rajta legyen az $x = 0$ egyenesen, az y tengelyen, ill. a koordináta-rendszertől elvonatkoztatva, hogy S a p szimmetriatengelyén legyen.

Megjegyzés. Miután felírtuk a normálisok egyenletét, megoldásunkat így is folytathatjuk: Annak a feltételét keressük, hogy az

$$x + 2ay - 2a^3 - a = 0$$
$$x + 2by - 2b^3 - b = 0$$
$$x + 2cy - 2c^3 - c = 0$$

egyenletű egyeneseknek legyen közös pontja, vagyis legyen olyan (x_0, y_0) számpár, melyre az

$$x_0 + 2zy_0 - 2z^3 - z = 0 \tag{3}$$

harmadfokú egyenletnek az a, b, c (különböző) számok a gyökei. A gyökök és együtthatók közti összefüggések[1] szerint az

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$$

harmadfokú egyenlet (melyben $A \neq 0$) gyökeinek összege $-\dfrac{B}{A}$, így a, b, c csak akkor lehet (3) gyöke, ha

$$a + b + c = 0,$$

hiszen (3)-ban z^2 nem szerepel. Ez a feltétel tehát szükséges ahhoz, hogy a három normális egy ponton menjen át.

Megmutatjuk, hogy a kapott feltétel elégséges is. Valóban, a gyökök és együtthatók összefüggése szerint a, b, c akkor és csakis akkor gyöke a

$$2z^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$$

egyenletnek, ha

$$B = 2(a + b + c), \qquad C = -2(ab + bc + ca), \qquad D = 2abc.$$

Így, ha $a + b + c = 0$, akkor

$$x_0 = D = 2abc, \qquad y_0 = \frac{C + 1}{2} = \frac{1}{2} - (ab + bc + ca)$$

mellett a, b, c gyöke a (3) egyenletnek, vagyis a három normális átmegy az (x_0, y_0) ponton.

[1] Lásd pl. *Hack Frigyes – Kugler Sándorné:* Függvénytáblázatok. Matematikai és fizikai összefüggések. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. 66. old. 25.33. képletcsoport.