A feltételből következik, hogy $s = \frac{qr}{p}$, tehát egyenletünk behelyettesítéssel a

$$px^3 - qx - rx + \frac{qr}{p} = 0$$

egyenletbe megy át. Szorozzuk meg az egyenletet p-vel:

$$p^2x^3 - pqx^2 - prx + qr = 0.$$

Az első két tagból a px^2-et, a második kettőből r-et kiemelve, $px - q$ ismét kiemelhető. Egyenletünk a szorzattá alakítás után:

$$(px^2 - r)(px - q) = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$x_1 = \sqrt{\frac{r}{p}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{r}{p}}, \qquad x_3 = \frac{q}{p}.$$

A feltétel szerint a paraméterek pozitívak, tehát a gyökök valóban valósak. A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.

Az x_1 és x_2 egymás ellentettjei, és mivel $r \neq 0$, nem lehetnek egyenlők.

$x_2 < 0$, $x_3 > 0$, tehát szintén nem lehetnek egyenlők. Egyetlen lehetőség, hogy $x_1 = x_3$. Ez akkor teljesül, ha

$$\sqrt{\frac{r}{p}} = \frac{q}{p}, \quad \text{azaz} \quad \frac{r}{p} = \frac{q^2}{p^2}, \quad q^2 = rp,$$

azaz ha a q paraméter az r és p mértani közepe.

$p = \frac{qr}{s}$ miatt $q^2 = \frac{r^2q}{s}$, $r^2 = qs$, r is mértani közepe q-nak és s-nek, azaz mondhatjuk, hogy $x_1 = x_3$ egyenlősége esetén a p, q, r, s számok mértani sorozatot alkotnak.

Fordítva, ha az együtthatók mértani sorozatot alkotnak, következik a gyökök egyenlősége, pl. $p = 1$, $q = \lambda$, $r = \lambda^2$, $s = \lambda^3$, $ps = rq = \lambda^3$ teljesül. Az egyenlet $x^3 - \lambda x^2 - \lambda^2 x + \lambda^3 = 0$, szorzat alakja $(x - \lambda)^2(x + \lambda) = 0$, tehát van két egyenlő gyöke.