I. forduló, kezdők (legföljebb I. osztályosok) részére

1. A szilvának 80%-a víz, az aszalt szilvának már csak 40%-a. Mennyi szilvából lesz 100 kg aszalt szilva?

2. Hány olyan hatjegyű szám van, amely 3-mal osztható?

3. Adott a körben egy húr és egy pont. Forgassuk el a húrt a kör középpontja körül úgy, hogy áthaladjon az adott ponton.

4. Melyek azok a háromszögek, amelyeket az egyik csúcsukból húzott szögfelező olyan két részháromszögre bont, hogy egyikük szögei megegyeznek az eredeti háromszög szögeivel?

5. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{x}{2}+3\right|>2{,}5x.$$

6. Az 504-nek hány természetes szám osztója van?

7. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge és a velük szemben levő oldalak különbsége.

8. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok a pontok, amelyeknek (x,y) koordinátáira teljesül:

$$|x|+|y|=1.$$

9. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyekhez hozzáadva a számjegyeik felcserélésével nyert számot, 7-tel osztható számhoz jutunk?

10. Adjunk meg egy olyan – képlettel meghatározott – függvényt, amelynek értéktáblázata így kezdődik:

x	1	2	3	4	5	...
y	1	4	27	256	3125	...

11. k^2-4k+1 a k-nak milyen egész értékeire lesz négyzetszám?

12. A $25^2=625$ egyenlőség azt mutatja, hogy van olyan kétjegyű szám, amelynek négyzete az eredeti számra végződik. Adjuk meg az összes ilyen kétjegyű számokat.

13. Legyen P az adott AB szakasznak egy tetszőleges belső pontja. Emeljünk négyzeteket az AP és PB szakaszokra (az AD szakasz ugyanazon oldalán). Rajzoljuk meg a négyzetek O_1, illetve O_2 középpontját. Milyen pályát ír le az O_1O_2 szakasz felezőpontja, ha P végigfut az AB szakasz belső pontjain?

14. Négy sportoló öt sportág mindegyikében összeméri erejét. Sportáganként a győztes 1 pontot kap, a többi három nem kap pontot. A verseny végén minden résztvevő még annyi pontot kap, ahányan nála kevesebb pontot értek el, és így alakulnak ki a végső pontszámok. Milyen értékek fordulhatnak elő a végső pontszámok között?

15. Egy pók a legrövidebb úton szeretne eljutni rokonaihoz egy kocka alakú terem falain az egyik sarokból a tőle legtávolabbi sarokba. Hogyan haladjon?

I. forduló, haladók (legföljebb II. osztályosok) részére

1. Melyik az a négyjegyű természetes szám, melyet olyan két tényező szorzatára lehet bontani, melyek egyike a^a alakú, ahol a természetes szám, és a tényezők összege 100?

2. Bizonyítsuk be, hogy a $7+5k$ alakú számok között (ahol k egész szám) végtelen sok egyezik meg 7-nek valamelyik hatványával.

3. Az $ABCD$ téglalap C csúcsában emeljünk az AC átlóra merőleges egyenest és messe ez az AB és AD oldal egyeneseit az E, ill. F pontban. Bizonyítsuk be, hogy

$$BE:DF=AD^3:AB^3.$$

4. Mi a legkisebb értéke a következő kifejezésnek?

$$f(x)=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6).$$

5. Legyen P és Q az $ABCD$ négyszög AB, ill. CD oldalának felezőpontja és legyen AQ és DP metszéspontja E, míg BQ és CP metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy az $EPFQ$ négyszög területe egyenlő az AED háromszög és a BFC háromszög területének összegével.

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$10^n+18n-1$$

osztható 27-tel (n természetes szám).

7. Igazoljuk, hogy ha az ABC háromszög magasságpontja M, akkor

$$AM^2+BM^2-2CM^2=2AB^2-BC^2-CA^2.$$

8. A szögvas L alakú „vonalzó”, amellyel egyeneseket lehet húzni. Ezenkívül szabad szögvas segítségével az egyenes adott pontjában az egyenesre merőleges egyenest állítani, de nincs megengedve az egyenesen kívül fekvő pontból az egyenesre merőlegest húzni. – Szerkesszük meg egy adott szakasz felezőpontját egyetlen szögvas segítségével.

9. Legyen az OB szakasz a K középpontú körnek húrja és A pont az DB belső pontja. Az A-n átmenő, KO-ra merőleges egyenes messe a kört a C pontban. Bizonyítsuk be, hogy OC mértani középarányos OA és OB között.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b valós számok, akkor

$$(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4.$$

11. Adott a háromszög M magasságpontja, S súlypontja, továbbá az A csúcsból induló magasságvonal AM szakaszának F felezőpontja. Szerkesszük meg a háromszöget.

12. Az a-nak és b-nek milyen értékei mellett lesz másodfokú vagy másodfokúra visszavezethető a következő egyenlet?

$$\frac{a}{1-x} - \frac{2}{2-x} + \frac{3}{3-x} - \frac{4}{4-x} + \frac{b}{5-x} = 0.$$

13. Adott a sík négy pontja: S, T, U és V. Szerkesztendő olyan rombusz, melynek egyik szöge $60°$, és a rombusz egymás után következő oldalai (vagy az oldalak meghosszabbításai) rendre átmennek egy-egy adott ponton.

14. Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az

$$x^2 + px - 12 = 0 \qquad \text{és} \qquad x^2 - 6x + 2p = 0$$

egyenleteknek legyen közös gyökük.

15. Bebizonyítandó, hogy valamely sokszög belsejében fekvő konvex sokszög kerülete kisebb, mint az őt tartalmazó sokszög kerülete.

II. forduló, kezdők (legföljebb I. osztályosok), általános tantervű és szakosított matematika–fizika tantervű osztályok részére

1. Két városból: A-ból és B-ből egymással szemben egyszerre indul egy személyvonat, illetve egy tehervonat. Amikor a személyvonat B-be ér, akkor onnan gyorsvonat indul A-ba, és A-ban utoléri a tehervonatot. Az A és B között félúton levő sorompónál a pályaőr megfigyelte, hogy a személyvonat áthaladása után 10 perccel haladt át a tehervonat, majd újabb 20 perc múlva követte a gyorsvonat. A gyorsvonat sebessége 120 km/ó. Mekkora A és B távolsága? Milyen sebességgel haladt a személyvonat és a tehervonat?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha három természetes szám összege osztható 30-cal, akkor ötödik hatványaik összege is osztható 30-cal.

3. Az ABC háromszög AB oldalának felező merőlegesén felveszünk egy O pontot úgy, hogy az O középpontú, C-n áthaladó kör a BC és AC oldalt az A_1, illetve B_1 belső pontban messe. Jelöljük az AB oldalegyenesnek a körhöz C-ben húzott érintővel való metszéspontját P-vel, az A_1B_1 egyenessel való metszéspontját pedig Q-val. Igazoljuk, hogy $QA = BP$.

II. forduló, kezdők (legföljebb I. osztályosok), szakosított matematikai osztályok részére

1. Azonos az előző felsorolás 1. feladatával.

2. Az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ n-edfokú polinom együtthatói egész számok. Lehetséges-e, hogy a polinom értéke az $x = 1$ helyen 1 és az $x = 3$ helyen 4?

3. Legyenek az $ABCDEF$ konvex hatszög oldalai egységnyi hosszúságúak és tegyük fel, hogy az ACE és BDF háromszögek hegyesszögűek. Igazoljuk, hogy a két háromszög köré írt körök sugarai közül nem lehet mindkettő nagyobb 1-nél és nem lehet mindkettő kisebb 1-nél.

II. forduló, haladók (legföljebb II. osztályosok), általános tantervű és szakosított matematika–fizika tantervű osztályok részére

1. Egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget forgassunk el a középpontja körül $45°$-kal. Mekkorák azoknak a kis háromszögeknek a területei, amelyeket az eredeti háromszögből az elforgatott háromszög oldalai metszenek le?

2. Egy óra három mutatója (az óra-, a perc- és a másodpercmutató) egyenletes mozgással közös tengely körül forog, 12 óra és 12 óra 30 perc között mely időpontban lesz a két-két mutató által bezárt legkisebb szög a lehető legnagyobb?

3. Bizonyítandó a következő két állítás:

a) Megadható nyolc olyan egész szám, hogy azok közül semelyik ötnek az összege nem osztható 5-tel.

b) Kilenc egész számból mindig ki lehet választani olyan ötöt, amelyek összege 5-tel osztható.

II. forduló, haladók (legföljebb II. osztályosok), szakosított tantervű matematikai osztályok részére

1. Legfeljebb mekkora lehet annak a háromszögnek az A csúcsánál fekvő szöge, amelynek a B és C csúcsából kiinduló súlyvonalai $45°$-os szöget zárnak be egymással? ($BSC\sphericalangle = 45°$)

2. Határozzuk meg x-nek olyan legfeljebb másodfokú $f(x)$ polinomját, hogy az

$$x^2 + \left[f(x)\right]^2 + x^2 \cdot \left[f(x)\right]^2$$

kifejezés egy polinom teljes négyzete legyen.

3. Bizonyítsuk be, hogy konvex négyszög átlóját $1:3$ arányban osztó ponton keresztül mindig húzható olyan egyenes, amelynek a négyszög belsejébe eső szakaszát az említett pont $1:2$ arányban osztja.