Az inverzióról szóló pályázatunk[1] ötlete tulajdonképpen az 1968. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia egyik példájának megoldásakor keletkezett. A példa számolás mentes megoldását kerestük, és a keresés közben találtuk a feladatnak a pályázat kiírásakor tárgyalt általánosítását, majd ennek az inverzió felhasználásával történő bizonyítását. Most, hogy a pályázatra beérkezett dolgozatokat végigolvastuk, végre megtaláltuk az eredeti feladat inverzió-mentes (és természetesen számolás mentes) megoldását. Számunkra a pályázat már csak ezért is sikeresnek mondható, reméljük, hasonlóan sikeresnek érzik pályázatunkat mindazok, akik részt vettek benne. Azoknak pedig, akik nem vettek részt, azt javasoljuk, hogy az alább közölt megoldások elolvasása előtt mindig álljanak meg egy kis időre, és próbálják az egyes feladatokat önállóan megoldani. Lapunk szokásainak megfelelően igyekeztünk a pályázók megoldásai közül kiválasztani a legszebbet, a névaláírások mellől hiányzó osztály- és iskolajelzések a díjak odaítéléséről szóló jelentésben[2] megtalálhatóak.

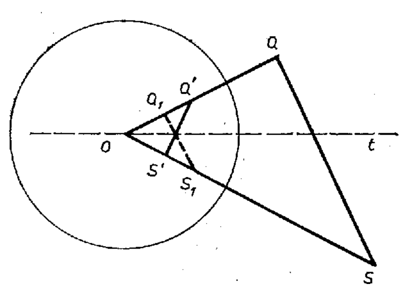
1. feladat. *Legyen az inverzió alapkörének középpontja O, sugara r, a sík két tetszőleges, O-tól különböző pontja Q és S, ezek inverze Q' és S'. Bizonyítandó, hogy*

$$\frac{Q'S'}{QS} = \frac{OS'}{OQ} = \frac{OQ'}{OS}.$$

Megoldás. Az inverzió definíciója szerint Q' és S' az OQ, illetve OS félegyenesnek az a pontja, melyre

$$OQ' \cdot OQ = OS' \cdot OS = r^2,$$

amiből állításunk $\dfrac{OS'}{OQ} = \dfrac{OQ'}{OS}$ része közvetlenül adódik. Mérjük fel az OQ félegyenesre az OS' szakaszt, az OS félegyenesre pedig az OQ' szakaszt, és jelöljük a kapott végpontokat Q_1 gyel, illetve S_1 gyel (1. ábra).



1. ábra

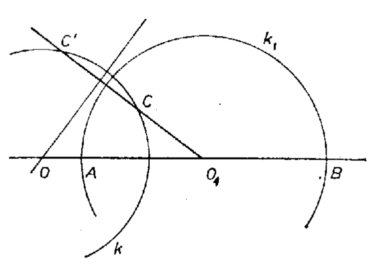
Mivel $OQ : OQ_1 = OQ : OS' = OS : OQ' = OS : OS_1$, és Q_1, S_1 az OQ, illetve OS félegyeneseken vannak, O az az centrumú hasonlóság, mely Q-t Q_1 be viszi, az S pontot S_1 be viszi, és így $QS : Q_1S_1 = OQ : OQ_1$.

Legyen t az az egyenes, amelyre tükrözve az OQ félegyenes az OS félegyenesbe megy át (ezt az egyenest a QOS szög felezőjének nevezzük; ha a Q, O, S pontok egy egyenesen vannak, akkor t merőleges erre az egyenesre és átmegy O-n, vagy azonos ezzel az egyenessel aszerint, hogy O elválasztja-e a Q, S pontokat vagy sem). A t-re való tükrözés a Q_1 pontot S'-be, Q'-t S_1-be viszi át, tehát $Q_1S_1 = Q'S'$, és így $Q'S' : QS = Q_1S_1 : QS = OQ_1 : OQ = OS' : OQ$, amint azt bizonyítanunk kellett.

Lakatos Béla

2. feladat. *Adott a síkban három különböző pont: A, B, C. Szerkesszük meg azt a kört, mely átmegy C-n és amelyikre A-t invertálva B-t kapjuk.*

1. megoldás. Legyen a keresett k kör középpontja O (2. ábra).



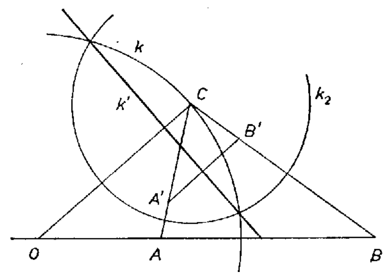
2. ábra

[1] Lásd K. M. L. 42 (1971) 1-7.
[2] Lásd K. M. L. 43 (1971) 5–6.

Mivel $OA \cdot OB = OC^2$, az AB szakasz fölé rajzolt, k_1-gyel jelölt Thalész-körhöz O-ból húzott érintő hossza OC. Másképpen fogalmazva, a k és k_1 körök merőlegesen metszik egymást. Ebből következik, hogy k-nak k_1-re vonatkozó inverze önmaga, ezért k átmegy C-nek k_1-re vonatkozó inverzén, C'-n is (ha $C' \equiv C$, akkor ráadásul OC érinti k-t). C' birtokában egyértelműen megszerkeszthető a feladatnak eleget tevő k kör. Egyetlen kivétel, ha $CO_1 \perp AB$ (ahol Q_1 a k_1 középpontja), azaz ha $CA = CB$, mert ekkor CC' felező merőlegese nem metszi AB-t, ekkor a feladatnak nincs megoldása.

Pap Gyula

2. megoldás. Szerkesszük meg először A és B inverzét a C középpontú, tetszőleges k_2 körre vonatkozólag (3. ábra), jelöljük ezeket A' és B'-vel.



3. ábra

A keresett k kör k' inverze k_2 is vonatkozólag egyenes lesz, melyre nézve A' és B' tükrös párt alkotnak (pontversenyen kívüli 31. probléma[1]). k' tehát az $A'B'$ felező merőlegese, ezt visszainvertálva kapjuk k-t. k egyenes lesz, ha k' átmegy C-n, azaz ha $CA' = CB'$, de ekkor $CA = CB$. Tehát ha $CA = CB$, akkor a feladatnak nincs megoldása.

k' inverzének szerkesztése két esetre bomlik. Ha A, B és C háromszöget alkot, akkor a 3. ábrából könnyen leolvasható, hogy a C-n keresztülmenő, az $A'B'$-vel párhuzamos egyenes kimetszi AB-ből a keresett kör középpontját. Ha A, B és C egy egyenesbe esik, akkor az inverzió alapkörét célszerű úgy felvenni, hogy ne tartalmazza sem A-t, sem B-t. A' és B' ekkor k belsejébe kerülnek, k' két pontban metszi k_2-t, s ezek C-vel együtt a keresett kör három pontját adják.

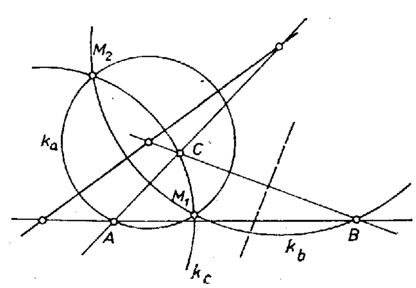
Megjegyzés. Ha A, B és C háromszöget alkotnak, akkor a feladatra több szép egyszerű megoldás van. Ezek közül kettőt bizonyítás nélkül említünk:

1. Az ABC háromszög körülírt körének C-beli érintője kimetszi AB-ből a keresett kör középpontját.
2. A C szög külső és belső szögfelezőinek AB-vel alkotott metszéspontjai a keresett kör átmérőjének végpontjai.

3. feladat. *Adott a síkban három különböző pont: A, B és C. Legyen k_a az A-n átmenő, B-t C-be vivő, k_b a B-n átmenő, C-t A-ba vivő, k_c, a C-n átmenő, A-t B-be vivő inverzió alapköre. Mutassuk meg, hogy van két pont, amelyeken e három kör mindegyike átmegy.*

1. megoldás. Mindenekelőtt fel kell tételeznünk, hogy az AB, AC, BC szakaszok különböző hosszúak, mert ellenkező esetben a szóban forgó körök valamelyike nem létezik.

A k_c, kör elválasztja A-t és B-t, legyen pl. A a k_c belsejében (4. ábra).



4. ábra

Ekkor AC minden pontja, a C kivételével, k_c belsejébe esik. A k_b kör áthalad B-n és AC-t egy belső pontba metszi, tehát k_b-nek a k_c-n kívüli pontja B, és van k_c-n belüli pontja is, ilyen például az AC szakaszon levő pontja, azaz k_b és k_c két pontban metszik egymást: legyenek ezek M_1 és M_2.

Invertáljuk k_b-t k_c-re, a kapott k_b' átmegy A-n, és mivel A és C inverz pár k_b- re, azért B és C is inverz pár lesz k_b'-re (lásd 31. probléma). Mivel a 2. feladat megoldása egyértelmű, ebből következik, hogy k_b' azonos k_a-val. Így, ha k_b az M_1 és M_2-ben metszette k_c-t, ugyanott metszi k_b-t k_b-nek k_c-ra vonatkozó inverze, k_a is, s ezt akartuk bizonyítani.

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 39 (1969) 155-166.

2. megoldás. Tegyük fel, hogy $AB > BC > AC$. Az I. példa alapján (Apollóniosz-kör), felhasználva a 2. feladatban bizonyított egyértelműséget, k_a a B és C pontokhoz és a $\lambda = \dfrac{AB}{AC}$ arányhoz tartozó Apollóniosz-kör. Az Apollóniosz-kör sohasem metszheti a szakaszfelező merőlegest, mindig az általa meghatározott két félsík valamelyikén van, jelenleg azon, amelyikre A esik. Mivel a B és C pontok k_a-ra inverz pontok, egyikük a kör belsejében van, de akkor ez csak C lehet, míg B kívül van. Hasonlóan igazolható, hogy k_b is tartalmazza C-t, míg A kívülre esik. A k_a és k_b köröknek van közös belső pontjuk, C, de egyik sem tartalmazhatja a másikat, ezt mutatja a B és A pont helyzete, tehát k_a és k_b két pontban (M_1 és M_2) metszik egymást.

Az Apollóniosz-kör definíciója szerint $M_1B : M_1C = AB : AC$ és $M_1C : M_1A = BC : BA$. A két egyenlőséget összeszorozva $M_1B : M_1A = BC : AC$, ami azt mutatja, hogy a harmadik Apollóniosz-kör, k_c is átmegy M_1-en. Ugyanezt mondhatjuk el M_2-ről is.

Boros Endre, Petz Dénes

4. feladat. *Adott a síkban három különböző pont: A, B, C. Jellemezzük azokat a köröket, melyekre invertálva az adott pontokat, a kapott A', B', C' pontokra $A'C' = B'C'$ teljesül.*

1. megoldás. Az 1. feladat eredményét felhasználva tetszőleges O középpont esetén:

$$CA : C'A' = OA : OC', \qquad CB : C'B' = OB : OC'. \tag{1}$$

Ha

$$A'C' = B'C', \tag{2}$$

akkor a két egyenletet elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB}. \tag{3}$$

Megfordítva, ha (3) teljesül, (1)-gyel összevetve adódik (2). O tehát akkor és csak akkor tartozik a mértani helyhez, ha (3) teljesül és C' létezik. Az O pontok mértani helye az I. példa alapján felírt, az A és B pontokhoz tartozó Apollóniosz-kör, kizárva belőle a C pontot. Az inverzió alapkörének sugara tetszőleges lehet. Ha $CA = CB$, akkor a mértani hely az AB oldalfelező merőlegese, a C pontot most is kizárva belőle.

Nagy Sándor

2. megoldás. Alkalmazzuk a 2. feladatot, és rajzoljuk meg a C-n átmenő, A-t B-be vivő inverzió egyértelműen meghatározott alapkörét, k-t (ha $AC = BC$, akkor AB felező merőlegesével helyettesítsük k-t). Ha az inverzió centruma k-nak C-től különböző pontja, akkor k inverze egyenes lesz, melyre A' és B' tükrösen helyezkednek el (lásd 31. probléma), tehát az inverzió a kívánt tulajdonságú. Ha az inverzió középpontja nincs a k-n, akkor k inverze kör, melyre A' és B' inverz pont pár, de ekkor $A'C' = B'C'$ nem teljesülhet, mert ekkor ilyen kör nincs a 2. feladat szerint. A mértani helyet tehát k-nak C-től különböző pontjai alkotják.

Petz Dénes

5. feladat. *Adott egy tetszőleges háromszög. Van-e olyan inverzió, mely a háromszög csúcsaihoz egy szabályos háromszög csúcsait rendeli hozzá?*

Megoldás. A 4. feladat megadja azon O inverzió középpontok mértani helyét, melyekre invertálva (tetszőleges sugár esetén) $A'C' = B'C'$, s láttuk, hogy ez a mértani hely a 3. feladatban szereplő k_c kör (melyet az AB felező merőlegesével kell pótolni, ha $AC = BC$). Az $A'B' = B'C'$ feltételhez tartozó kör hasonlóan a 3. feladat k_b köre. Ezek metszéspontjára és csak erre teljesül a feladat követelménye. Láttuk, hogy ezek a körök a háromszög Miquel-pontjaiban metszik egymást, ezek és csak ezek a megfelelő inverziócentrumok. Ha a két mértani hely egyike egyenes, ez a mondottakon nem változtat; ha kettő egyenes, akkor már a kiindulási háromszög is egyenlő oldalú, tehát a harmadik mértani hely is egyenes, és csak egyetlen ilyen pont létezik, a háromszög középpontja.

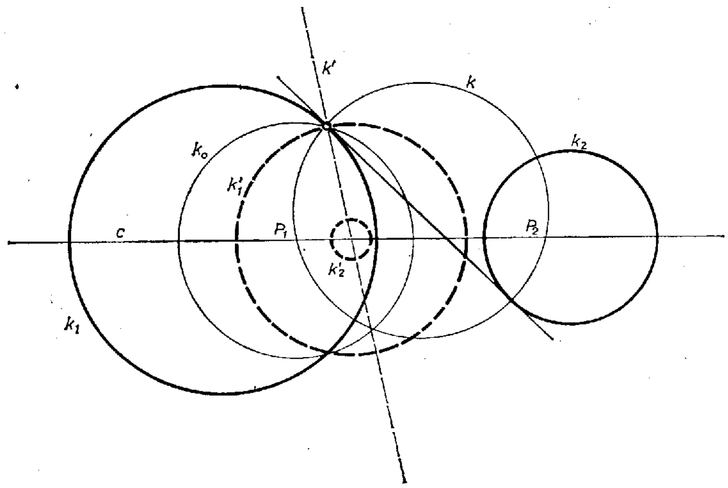
Megjegyzés. Az 5. feladat és a 3. feladat egymás „inverzei”. A k_a, k_b, k_c metszéspontja körüli körre invertálva, az ABC háromszög szabályos háromszögbe megy át, és k_a', k_b', k_c' ennek magasságvonalai lesznek. Megfordítva, ha egy inverzió az ABC háromszöget szabályos háromszögbe viszi, ez utóbbi magasságvonalait visszainvertálva a kívánt tulajdonságú k_a, k_b, k_c, köröket kapjuk, melyek nyilván átmennek az inverzió centrumán.

Sebő András

6. feladat. *Adott a síkban két kör, k_1 és k_2, melyek nem metszik egymást és egyik sincs a másik belsejében. Mutassuk meg, hogy két olyan pont van a síkban, melyek körül tetszőleges k kört rajzolva, a k_1 és k_2 körök k-ra vonatkozó k_1', k_2' inverzei koncentrikus körök.*

Megoldás. Tegyük még fel, hogy a két kör nem is érinti egymást, mert különben nem lehet a feladatnak megoldása, hiszen az inverzek is érintenék egymást.

Vegyünk fel egy k kört, mely k_1-et és k_2 -t merőlegesen metszi és c centrálisukat is két pontban metszi. Legyen a két metszéspont P_1 és P_2. Ilyen például az egyik közös belső érintő fölé emelt Thalész-kör (5. ábra).



5. ábra

Megmutatjuk, hogy P_1, P_2 bármelyike megfelel a feladat követelményeinek. Pl. a P_1 körüli k_0 körre invertálva, a k' és $c' \equiv c$ egyenesek merőlegesen metszik k_1'-et és k_2'-t, tehát középpontjukon áthaladnak. k' és c metszéspontja lesz tehát mindkét kör középpontja, tehát koncentrikusak.

Több ilyen pont nincs, mert valamely P_3 pontra invertálva k' és c' közül legalább az egyik kör lenne, és olyan kör, amely a koncentrikus k_1'-t és k_2'-t merőlegesen metszi, nem létezik.

Balog János

7. feladat. *Adott a síkban két kör, melyeknek van közös belső érintőjük. Mutassuk meg, hogy van két pont a síkban, melyeken, körök tetszőleges közös (külső vagy belső) érintőjének az érintési pontok közti szakasza fölé rajzolt Thalész-kör átmegy.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy a két kör (k_1 és k_2) nem érinti egymást. (Érintő körök esetén a feladat állításában szereplő két pont az érintési ponttal esik össze.) A feladat állításán túlmenően azt bizonyítjuk be, hogy tetszőleges, a k_1-et és k_2-t merőlegesen metsző k kör átmegy a 6. feladat által meghatározott két ponton. Invertáljunk ezen pontok valamelyike körüli körre: k_1', k_2' koncentrikusak lesznek, k' ezeket merőlegesen metsző kör vagy egyenes. Koncentrikus köröket merőlegesen metsző kör nem létezik, tehát k' egyenes, azaz k átmegy az inverzió centrumán, s ezt akartuk bizonyítani.

Petz Dénes Balog János

A 8. feladat megoldását vázlatosan a 9. feladat 1. megoldásába olvasztottuk bele.

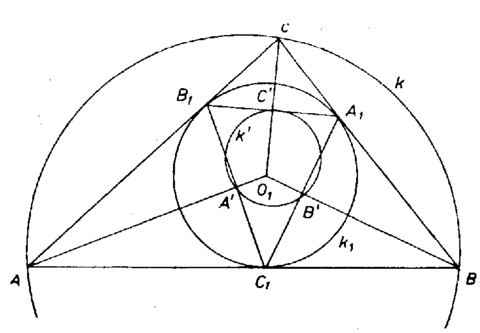
9. feladat. (Euler tétele). *Bizonyítsuk be, hogy két adott körhöz (k-hoz és k_1-hez) akkor és csakis akkor van olyan háromszög, melynek k a körülírt, k_1 a beírt köre, ha*

$$d^2 + r_1^2 = (r - r_1)^2, \tag{4}$$

ahol r, r_1 a k és k_1 körök sugara, d pedig a középpontjaik távolsága.

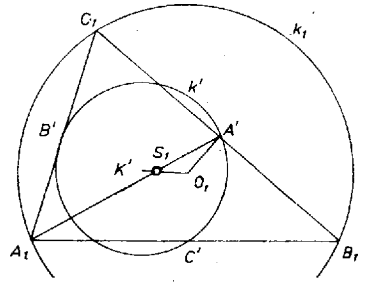
1. megoldás. Először Euler tételének a következő átfogalmazását bizonyítjuk be: a sík k és k_1 köreihez akkor és csakis akkor létezik olyan ABC háromszög, amelynek k a körülírt, k_1 a beírt köre, ha k_1 a k belsejében van, és k-nak k_1-re vonatkozó k' inverzében az átmérő egyenlő k_1 sugarával.

Tegyük fel, hogy létezik ilyen ABC háromszög, akkor k_1 nyilván k belsejében van. Érintse k_1 a háromszög oldalait az A_1, B_1, C_1 pontokban, és jelöljük k_1 középpontját O_1 gyel (6. ábra).



6. ábra

Könnyen látható, hogy az inverzió alapkörére nézve tetszőleges külső pont inverzét megkaphatjuk úgy is, hogy az illető pontból érintőket húzunk az alapkörhöz, és megfelezzük az érintési pontok által meghatározott szakaszt. Emiatt az A, B, C pontnak a k_1 körre vonatkozó A', B', C' inverze rendre a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakasz felezőpontja, és k-nak k_1-re vonatkozó k' inverze az $A'B'C'$ háromszög körülírt köre. Mivel az $A'B'C'$ háromszöget az $A_1B_1C_1$ háromszögből előállíthatjuk az $A_1B_1C_1$ háromszög S_1 súlypontjára mint centrumra vonatkozó $^1/_2$ arányú kicsinyítéssel, és egy ezt követő, S_1-re vonatkozó tükrözéssel (7. ábra), azért k' sugara valóban fele k_1 sugarának.

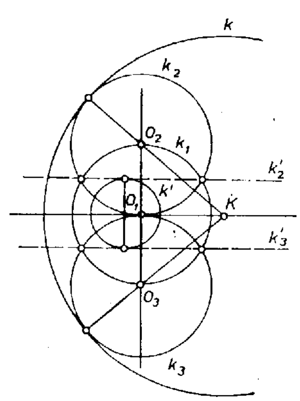


7. ábra

Ha k_1 a k belsejében van, akkor k-nak k_1-re vonatkozó k' inverze k_1 belsejében van. Megmutatjuk, hogy ha k' sugara egyenlő, k_1 sugarának a felével, akkor k' tetszőleges A' pontjához található k_1-en olyan A_1, B_1, C_1 és k'-n olyan B', C' pont, hogy A', B', C' rendre felezi a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakaszt. Ebből pedig következik, hogy például A'-nek k_1-re vonatkozó A inverze olyan pont, hogy az AB_1, AC_1 egyenesek érintik k_1-et, vagyis az A', B', C' pontokat k_1-re invertálva, a kapott ABC háromszögnek k_1 a beírt köre (és természetesen k a körülírt köre). Ezzel tehát azt látjuk be, hogy ha k_1 a k belsejében van, és k' átmérője egyenlő k_1 sugarával, akkor létezik olyan ABC háromszög, amelynek k_1 a beírt és k a körülírt köre, és ennek a háromszögnek az egyik csúcsa k-n tetszőlegesen felvehető.

Legyen tehát k' a k_1 belsejében, k' átmérője legyen egyenlő k_1 sugarával, és A' legyen k' tetszőleges pontja (7. ábra). Jelöljük k_1 és k' középpontját O_1-gyel és K'-vel, az O_1K' szakasz K'-höz közelebbi harmadolópontját S_1 gyel. Az S_1 centrumú, $2:1$ arányú hasonlóság, és az ezt követő, S_1-re vonatkozó tükrözés K'-t O_1-be, k'-t k_1-be viszi, tehát A'-t k_1 valamely pontjába viszi, jelöljük ezt a pontot A_1-gyel. Emeljünk merőlegest az $A'O_1$ szakasz A' végpontjában a szakaszra (feltevéseink szerint O_1 a k'-nek belső pontja, tehát nem lehet A'-vel azonos), és messe ez a merőleges k_1-et a B_1, C_1 pontokban. Így A' felezi a B_1C_1 szakaszt, az $A_1B_1C_1$ háromszögben A_1A' súlyvonal, és S_1 súlypont. Emiatt a B_1, C_1 pontoknak az S_1 centrumú, $1/2$ arányú kicsinyítésből, majd az ezt követő, S_1-re vonatkozó tükrözésből származó B', C' képei k'-n vannak, és rendre felezik az A_1C_1, A_1B_1 szakaszokat.

Megoldásunk utolsó lépéseként megmutatjuk, hogy (4) akkor és csakis akkor teljesül, ha k_1 a k belsejében van, és k' sugara $(1/2)r_1$. Legyen k és k_1 középpontja K és O_1, és messe az O_1K szakaszra O_1-ben emelt merőleges k_1-et O_2-ben és O_3-ban (ha O_1 azonos K-val, O_2 és O_3 legyen k_1 tetszőleges két átellenes pontja), és legyen k_2, ill. k_3 az O_2, ill. O_3 középpontú, r_1 sugarú kör. (4) nyilván ekvivalens azzal az állítással, hogy k_2 és k_3 belülről érint: k-t (8. ábra).

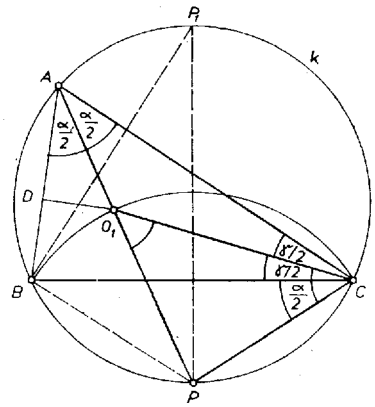


8. ábra

A k_2, k_3 körök k_1-re vonatkozó k_2', k_3' inverzei párhuzamos egyenesek, melyek távolsága egyenlő k_1 sugarával, k' középpontja pedig rajta van az O_1-en átmenő, velük párhuzamos egyenesen. Tehát k' akkor és csakis akkor érinti a k_2', k_3' egyeneseket, ha az átmérője egyenlő k_1 sugarával. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

2. megoldás[1]**.** Megmutatjuk, hogy a k belsejében levő O_1 pont akkor és csak akkor egyezik meg valamely, a k-ba beírt ABC háromszög beírható körének középpontjával, ha $O_1P = PC$, ahol P az A-t nem tartalmazó BC ív felezőpontját jelöli. Jelöljük a háromszög szögeit α, β, γ-val (9. ábra).

[1] Ez a megoldás megtalálható *Kürschák J. – Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.:* Matematikai versenytételek, I. rész. 3. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest. 1965. 40–41.



9. ábra

Tegyük fel, hogy O_1 a beírt kör középpontja, akkor O_1 rajta van a $C\sphericalangle$ szögfelezőjén, $CO_1P\sphericalangle = (\alpha/2) + (\gamma/2)$, mert az AO_1C háromszög külső szöge, az $O_1CP\sphericalangle = (\alpha/2) + (\gamma/2)$, mert a $BCP\sphericalangle = BAP\sphericalangle = \alpha/2$, tehát az O_1PC háromszög egyenlő szárú, azaz $O_1P = PC$. Fordítva, ha $O_1P = PC$, akkor, mivel a beírt kör O_1' középpontja rajta van AP-n, és arra $O_1'P = PC$, nyilván következik, hogy $O_1' \equiv O_1$.

Rajzoljuk meg még a PP_1 átmérőt és jelöljük D-vel az AB és k_1 érintési pontját, akkor $ADO_1\triangle \sim P_1BP\triangle$, amiből $AO_1 : r_1 = 2r : PB$, azaz $2rr_1 = AO_1 \cdot PB = AO_1 \cdot O_1P$, s ez utóbbi a szelők tétele értelmében $(r+d)(r-d)$-vel egyenlő. Azaz a beírt kör sugarát az A pont helyzetétől függetlenül a $2rr_1 = (r+d)(r-d)$ egyenlet határozza meg, s ezt akartuk bizonyítani.

Pap Gyula

10. feladat. *A* III. *példához kapcsolódva mutassuk meg, hogy ha $d \perp c$, akkor O_1 felezi az O_2O_3 szakaszt.* (A III. példa szövegét lásd alább.)

Megoldás. Jelöljük a két kör másik közös érintőjét c_1-gyel, c_1 és d metszéspontját P-vel. A III. példából az O_1-et úgy kaphatjuk meg, hogy P-t merőlegesen vetítjük O_2O_3-ra. $PO_2 \perp PO_3$, mivel a d és c_1 egyenesek szögfelezői. Jelöljük a c és c_1 egyenesek metszéspontját Q-val (ha c és c_1 párhuzamosak, az állítás szimmetriaokokból nyilvánvaló), a PQD szöget 2φ-vel, akkor $QPD\sphericalangle = 90^\circ - 2\varphi$, $O_1PD\sphericalangle = \varphi$ (merőleges szárú szögek), $O_2PO\sphericalangle = 45^\circ$, tehát az O_2PO_3 háromszög derékszögű egyenlő szárú háromszög, amiből az állítás következik.

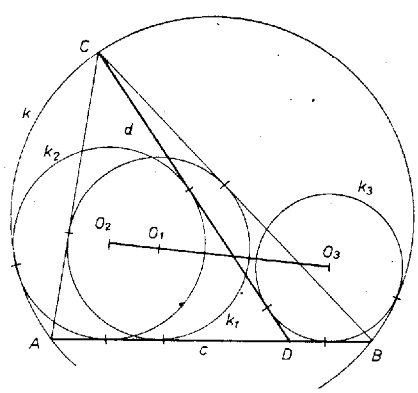
Boros Endre

Beszámolónk utolsó része a III. példa elemi megoldásának a közlése.

III. példa (az 1969. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 4. feladatának általánosítása). *Legyen az ABC háromszög körülírt kőre k, beírt köre k_1, az AB szakasz tetszőleges belső pontja D. Jelöljük az AB egyenest c-vel, a DC félegyenest d-vel (10. ábra). A c egyenest, k kört és a d félegyenest érintő két kör legyen k_2 és k_3. Megmutatjuk, hogy*

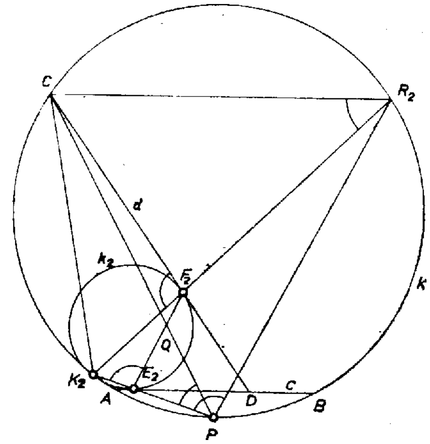
a) *a k_1, k_2 és k_3 kör O_1, O_2, O_3 középpontja egy egyenesen van,*

b) *a k_1 kört a k_2, k_3 körök és a d félegyenes egyértelműen meghatározzák.*

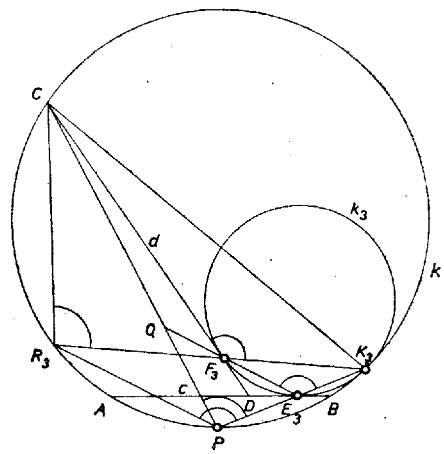


10. ábra

Bizonyítás. A C pontot nem tartalmazó AB ív felező pontját jelöljük P-vel, a c és d egyenesek és a k_2 kör érintési pontjait pedig E_2, F_2-vel. E_2F_2 és CP metszéspontja legyen Q (11a és 11b ábra).



11a. ábra



11b. ábra

Először bebizonyítjuk, hogy Q mindig létezik, azaz PC és E_2F_2 nem lehetnek párhuzamosak. Jelöljük a k és k_2 körök érintési pontját K_2-vel, K_2 egyben e két kör hasonlósági középpontja is: E hasonlóságnál E_2 és P egymásnak megfelelő pontok, hiszen a k-hoz P-ben húzható érintő párhuzamos AB-vel, és az AB egyenes elválasztja a K_2 és P pontokat. Ha $PC||E_2F_2$ lenne, akkor F_2-nek e nagyítás során C felel meg, azaz K, F_2 és C egy egyenesbe esnek, de ez ellentmondás, hiszen CF_2 a k_2 kör érintője kellene legyen.

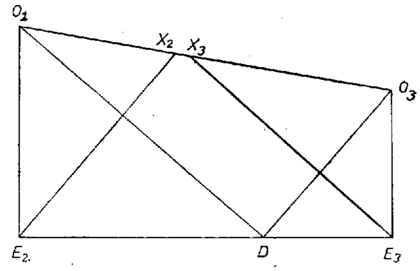
Bizonyításunk második lépéseként, felhasználva a 9. feladat 2. megoldását, meg fogjuk mutatni, hogy $Q \equiv O_1$ Ehhez először számítsuk ki a PQ szakasz hosszát. Bővítsük ki az ábrát: a K_2F_2 egyenes messe k-t R_2-ben. Be fogjuk bizonyítani, hogy$PE_2Q\triangle \sim R_2F_2C\triangle \sim R_2CK_2\triangle$. Mindhárom háromszögnek P-nél, ill. R_2-nél levő szögei, azonos íven nyugvó kerületi szögek lévén, egyenlők. Ezután a $PE_2Q\sphericalangle$, $R_2F_2C\sphericalangle$ és R_2CK_2 szög kiegészítő szögeinek egyenlőségét látjuk be: $K_2E_2Q\sphericalangle = K_2F_2C\sphericalangle$, mert azonos íveken nyugvó kerületi szögek, $K_2E_2Q\sphericalangle = K_2PR_2\sphericalangle$, mert $E_2F_2||PR_2$, ugyanis O hasonlósági középpont, továbbá a $K_2PR_2\sphericalangle = 180^\circ - R_2CK_2\sphericalangle$, mert PK_2CR_2 húrnégyszög. A párhuzamos szelők tételét, majd az első két háromszög hasonlóságát felhasználva

$$PK_2 : R_2K_2 = PE_2 : R_2F_2 = PQ : R_2C.$$

Két oldal aránya és egy szög megegyezik, tehát $PQK_2\triangle \sim R_2CK_2\triangle$. Az előzőkkel egybevetve $PE_2Q\triangle \sim PQK_2\triangle$, amiből $PE_2 : PQ = PQ : PK_2$, azaz PQ mértani középarányos PE_2 és PK_2 között. Másrészt $PE_2A\triangle \sim PAK_2\triangle$, mert egy szög közös és $E_2AP\sphericalangle = AK_2P\sphericalangle$, ugyanis egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek. Ebből $PE_2 : PA = PA : PK_2$, azaz PA mértani középarányos PE_2 és PK_2 között, így$PA = PQ$. Alkalmazva a 9. feladat elemi bizonyításában szereplő első állítást, Q az ABC háromszög beírt körének középpontja, azaz $Q \equiv O_1$.

Ugyanezt elmondhatjuk a k_3 és k körre vonatkozólag is (a kettes indexeket hármasra felcserélve). Ez azt jelenti, hogy E_3F_3 is átmegy Q_1-en, azaz E_2F_2 és E_3F_3 metszéspontja adja Q_1- et. Ezzel a *b)* állítást már igazoltuk, mivel az E_2, E_3, F_2, F_3 pontok függetlenek a k kör választásától.

Tekintsük most a 12. ábrát.



12. ábra

Be kell bizonyítani, hogy E_2F_2 és E_3F_3 az Q_2O_3-on metszik egymást. $O_2D \perp O_3D$, $E_2F_2 \perp O_2D$ és $E_3F_3 \perp O_3D$, mivel O_2D és O_3D a c és d egyenesek szögfelezői. Messe E_2F_2 az O_2O_3-t X_2-ben, továbbá E_3F_3 metszéspontja O_2O_3-mal legyen X_3. Mivel $O_2E_2D\triangle \sim DE_3O_3\triangle$, a magasságvonalak ugyanolyan arányban osztják az átfogót mindkét háromszögben. A párhuzamos szelők tétele szerint azonban ugyanilyen arányban osztja X_2 is és X_3 is O_2O_3-t, tehát $X_2 \equiv X_3$, s ezt akartuk bizonyítani.