Az 1140. sz. gyakorlatban Karcsinak 5 piros, 3 fehér és 2 zöld golyót kellett elhelyeznie két dobozban úgy, hogy az elsőbe 4, a másodikba 6 golyó kerüljön. Amint azt a megoldásban[1] láttuk, a lehetőségek száma 11. Az 1332. sz. gyakorlat megoldása[2] szerint 204-féleképpen oszthatunk ki Annus, Bözsi, Cili és Dóra között 8 gyümölcsöt: 1 almát, 2 barackot, 3 körtét és 2 szilvát úgy, hogy mindegyikük 2 darab gyümölcsöt kap. További rokon feladat a következő. A Kovács családban 3 fiú, a Nagy családban 4 fiú, Szabóéknál 5 lány, Tóthéknál 2 lány van. Kérdés, hányféleképpen állíthatjuk párba a gyerekeket úgy, hogy minden párban egy fiú és egy lány álljon, ha csak arra vagyunk tekintettel, hogy az egyes párokban melyik családok gyerekei állnak. A lehetséges három párosítás a következő (kezdőbetűkkel jelölve):

$$\begin{array}{l}
1.\ (K,\ S),\ (K,\ S),\ (K,\ S),\ (N,\ S),\ (N,\ S),\ (N,\ T),\ (N,\ T)\\
2.\ (K,\ S),\ (K,\ S),\ (K,\ T),\ (N,\ S),\ (N,\ S),\ (N,\ S),\ (N,\ T)\\
3.\ (K,\ S),\ (K,\ T),\ (K,\ T),\ (N,\ S),\ (N,\ S),\ (N,\ S),\ (N,\ S)
\end{array}$$

A három feladat közül a másodikat abban az általánosabb megfogalmazásban is vizsgálhatjuk, hogy nem kötjük ki, hogy mindegyik gyerek ugyanannyi gyümölcsöt kapjon. Ekkor – mint a dolgozat végén látni fogjuk – 8000 különböző lehetőség van a kiosztásra (ezek közül nyilván 4 olyan, hogy egyetlen gyerek kapja mind a 8 gyümölcsöt, a többi háromnak semmi sem jut).

*

A látott feladatok általános megfogalmazása a következő. Adott N golyó, melyek különböző színűek és köztük k-féle szín fordul elő. Az első színből n_1, a másodikból $n_2, \ldots$, a k-adikból n_k golyó van. (Természetesen $n_1+n_2+\ldots+n_k = N$.) Adott továbbá l doboz, az elsőbe m_1, a másodikba $m_2, \ldots$, az l-edikbe m_l golyó fér, ahol $m_1+m_2+\ldots+m_l = M \geq N$. A dobozokat meg tudjuk különböztetni egymástól. Kérdés, hányféleképpen helyezhetjük el a golyókat a dobozokba, ha az azonos színű golyókat nem tudjuk megkülönböztetni. Könnyen látható, hogy ennek a másik két feladat is speciális esete, eltérés csak a megfogalmazásban van. Mindhárom példában $M = N$, ami az általános esetben is mindig elérhető, ha bevezetünk egy $(k+1)$-edik, képzeletben létező színt, amelyből $(M-N)$ darab golyó van, és amelyből minden elhelyezésnél minden dobozba kiegészítésül annyit teszünk, hogy az illető doboz megteljen. Ezt az általános feladatot cikkünkben hozzárendelési problémának nevezzük, az elnevezés arra utal, hogy a feladatban szereplő kétféle mennyiségből (golyó és doboz, gyümölcs és gyerek, fiúk és lányok) párokat kell képeznünk, egymáshoz kell rendelnünk őket.

Ez a feladat ilyen általánosan igen nehéz, a lehetőségek száma nem adható meg egyszerű formában, csak nagyon bonyolult, áttekinthetetlen képletek ismeretesek. Itt a feladat két speciális esetéről lesz szó, az elsőben minden m_i értéke 1, azaz minden dobozba csak 1 golyó fér, a másodikban minden m_i értéke N lesz, vagyis az összes golyó belefér bármelyik dobozba.

A kiindulásul szolgáló három feladat tehát *nem* tartozik a vizsgálandó esetek körébe, de a második feladat említett átfogalmazása *igen*.

Ha minden m_i értéke 1, akkor célszerű feltenni, hogy $M = N$. Ekkor a lehetőségek száma csak az $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ számoktól függ, jelöljük ezt a számot $h(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$-val.

1. Tétel

$$h(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k) = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!},$$

ahol $n!$ az első n természetes szám szorzatát jelöli.

Bizonyítás. Állításunkat k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be. $k=1$ mellett állításunk nyilvánvaló, hiszen csupa ugyanolyan színű golyót csak egyféleképpen helyezhetünk el a dobozokban.

A $k=2$ esettel külön foglalkozunk, legyen a golyók színe – mondjuk – piros és fekete, ezek számát (n_1 és n_2 helyett) jelöljük inkább p-vel és f-fel. Most f szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $f=1$, elegendő a fekete golyó dobozát megválasztani. Mivel $(p+1)$ doboz van, ezek közül egyet $(p+1)$-féleképpen választhatunk ki, és ezt adja az állítás is:

$$h(p,\ 1) = p+1 = \frac{(p+1)!}{p!\cdot 1!}.$$

Ha már valamely f-re tudjuk, hogy

$$h(p,\ f) = \frac{(p+f)!}{p!\cdot f!},$$

akkor $h(p,\ f+1)$ értékét a következő módon határozhatjuk meg. Válasszunk ki a $(p+f+1)$ dobozból először egyet, ebbe tegyünk egy fekete golyót, majd a többi $(p+f)$ dobozba helyezzük el a többi golyót minden lehetséges módon. Így összesen $(p+f+1)\cdot h(p,\ f)$ elrendezést adtunk meg, aszerint, hogy melyik dobozzal kezdtük, azonban ezek között

[1] K. M. L. 36 (1968) 117.
[2] K. M. L. 42 (1971) 169.

azonosak is vannak. Minden egyes elrendezést annyiszor kaptunk meg, ahányféleképpen az először elhelyezett fekete golyó dobozát megválaszthatjuk, azaz $(f+1)$-féleképpen. Emiatt a kapott szám $(f+1)\cdot h(p,\, f+1)$, és a kettőből

$$h(p,\, f+1)=\frac{p+f+1}{f+1}\cdot h(p,\, f)=\frac{(p+f+1)!}{p!\cdot(f+1)!},$$

amint azt bizonyítani akartuk, vagyis a $k=2$ esetben igazoltuk tételünk helyességét.

Tegyük fel, hogy a tétel érvényességét valamely k (≥ 2) természetes számra már beláttuk; bizonyítsuk azt $(k+1)$-re. Helyettesítsük átmenetileg az első k színt egy közös színnel, ekkor a golyók elhelyezésére a már elintézett $k=2$ esetre vonatkozó eredményünk szerint:

$$h(n_1+n_2+\ldots+n_k, n_{k+1})=\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k+n_{k+1})!}{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!\cdot n_{k+1}!}$$

lehetőségünk van. Minden egyes ilyen elhelyezésnél rögzítsük a $(k+1)$-edik színű golyók helyzetét, és rendezzük át minden lehetséges módon az első k színű golyókat eredeti színük figyelembevételével. Erre az indukciós feltevés szerint minden egyes esetben

$$h(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!},$$

lehetőség van, így mind a $(k+1)$ színt figyelembe véve az összes lehetőség száma e két szám szorzata:

$$h(n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1})=h(n_1+\ldots+n_k,n_{k+1})\cdot h(n_1,n_2,\ldots,n_k)=$$
$$=\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k+n_{k+1})!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!\cdot n_{k+1}!},$$

amint azt bizonyítani akartuk. Tételünk bizonyítását ezzel befejeztük:

Következmények. 1. N különböző elemet $N!$-féleképpen állíthatunk sorba. Valóban, legyen $k=N$ és $n_1=n_2=\ldots=n_N=1$, vagyis legyen N különböző színű golyónk; ezeket (az egy sorban elhelyezett dobozokba) $h(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N)=N!$-féleképpen helyezhetjük el.

2. Ha adott k különböző elem, ezekből $h(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$ különböző N-elemű sorozatot képezhetünk úgy, hogy az első n_1-szer, a második n_2-ször, ..., a k-adik n_k-szor forduljon elő. Az indoklás ismét az, hogy a sorbarakást egyszerűen a dobozokon is elvégezhetjük.

3. N különböző elemből $\binom{N}{n}$-féleképpen választhatunk ki n ($\leq N$) különböző elemet, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel (ahol az $\binom{N}{n}$ binomiális együttható értéke

$$\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!(N-n)!},$$

és az itt esetleg fellépő $0!$ értéke megállapodásszerűen 1). Legyen ugyanis n piros és $(N-n)$ fekete golyónk, ezek elhelyezése egyértelműen jellemezhető a piros golyók számára kiválasztott dobozokkal. Tehát $h(n,\ N-n)$ egyenlő azzal, hogy hányféleképpen választhatunk ki az N doboz közül n-et.

4. N különböző elemből $N(N-1)(N-2)\ \ldots(N-k+1)$-féleképpen választhatunk ki n különböző elemet, ha a kiválasztás sorrendjére is tekintettel vagyunk. Színezés helyett ugyanis számozzunk most meg az N golyó közül n-et 1-től n-ig, a többi $N-n$ maradjon egyforma. Ha ezeket a golyókat elhelyezzük N dobozban úgy, hogy minden dobozban egy golyó legyen, a golyók elhelyezése alapján sorban kiválaszthatunk n dobozt úgy, hogy ebben a sorban a k-adik ($1\leqq k\leq n$) az a doboz legyen, amelyikbe a k-val jelzett golyó kerül. Tehát a golyók elhelyezése ekvivalens azzal, hogy az N doboz közül sorban kiválasztunk n-et, vagyis a lehetőségek száma

$$h(1,\,1,\ \ldots,\ 1,N-n)=\frac{N}{(N-n)!}=N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1).$$

*

Rátérünk a második eset vizsgálatára, tehát most minden m_i értéke N, így természetesen $M=l\cdot N\geq N$. Ez azt jelenti, hogy az N golyót (melyek között most is az első színből n_1, a másodikból n_2, ..., a k-adikból n_k van, l dobozba helyezzük el úgy, hogy egy-egy dobozba akárhány (akár az összes) golyó kerülhet. A lehetséges elhelyezések száma most az $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ számokon kívül az l számtól is függ. Jelöljük ezért most az összes hozzárendelési lehetőségek számát $H_l(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$-val.

2. Tétel

$$H_l(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{(n_1+l-1)!(n_2+l-1)!\cdot\ldots\cdot(n_k+l-1)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!\cdot[(l-1)!]^k}.$$

Bizonyítás. A különböző színű golyók elhelyezése most független egymástól abban az értelemben, hogy minden egyes színhez tetszőlegesen készíthetjük el a golyók elhelyezését és ezeket az elhelyezéseket egyesíthetjük. Emiatt

$$H_l(n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_k) = H_l(n_1) \cdot H_l(n_2) \cdot \ldots \cdot H_l(n_k),$$

elegendő tehát azt bizonyítanunk, hogy

$$H_l(n) = \frac{(n+l-1)!}{n! \cdot (l-1)!},$$

vagyis elegendő meghatároznunk, hányféleképpen helyezhetünk el n egyforma golyót l dobozban. Állítsuk sorba a golyókat és tegyünk közéjük $(l-1)$ jelet: az első jel előtti golyókat tegyük az első dobozba, az első két jel köztieket tegyük a másodikba és így tovább, végül az utolsó jel utániakat tegyük az l-edik dobozba. (Megengedjük, hogy a sorozat elválasztó jellel kezdődik vagy végződik és azt is, hogy több jel egymás mellé kerüljön. Ennek megfelelően a dobozok némelyike üresen maradhat.) A lehetőségek száma tehát annyi, ahányféleképpen az n golyót és az $(l-1)$ elválasztó jelet sorba rakhatjuk, ami az 1. tétel 2. következménye szerint $h(n,\ l-1)$. Tehát

$$H_l(n) = h(n, l-1) = \frac{(n+l-1)!}{n! \cdot (l-1)!},$$

amint azt bizonyítani akartuk. Tételünk bizonyítását ezzel befejeztük.

Következmények. 5. l különböző elemből l^k-féleképpen választhatunk ki k elemet, ha a kiválasztás sorrendjére is tekintettel vagyunk és egy-egy elemet akárhányszor választhatunk. Legyen ugyanis $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, és ismét számozzuk meg a golyókat. Ekkor a golyók elhelyezése ekvivalens az 1 dobozból képezhető k-elemű sorozatokkal. (Hiszen egynél több golyó is kerülhet ugyanabba a dobozba, a sorozatban ugyanaz a doboz többször is előfordulhat.) A lehetőségek száma tehát

$$H_l(1,\ 1, \ldots,\ 1) = \left(\frac{l!}{(l-1)!}\right)^k = l^k.$$

6. l különböző elemből $\binom{n+1-1}{n}$-féleképpen választunk ki n elemet, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel, de az egyes elemeket akárhányszor is megválaszthatjuk. Az elemek ismét a dobozok, ezekből egy-egy n-es csoportot úgy tekinthetünk, hogy miután valahogy elhelyeztünk bennük n egyforma golyót, minden dobozt annyiszor választunk, ahány golyó van benne.

*

Fő mondanivalónk végére jutottunk; a tanulságok összefoglalásával és a bevezetőül szolgáló példák egyikének újbóli felvillantásával zárjuk fejtegetéseinket. Legfontosabb tanulságunk nem a két tételben közölt (első látásra elég bonyolultnak tűnő) két képlet, azokat aligha érdemes megjegyezni. A következményekben található eredmények már érdekesebbek, de ezek előállítása sem volt a cikk igazi célja; azokban úgyis rendre felismerhetőek a IV. osztályban sorra kerülő kombinatorikai alapfeladatok (úgymint a permutációk, kombinációk és variációk számának meghatározása), elég lesz akkor megtanulni őket.

Az említett alapfeladatokat általában a kombinatorika építőköveinek tekintik, és a nehezebb problémák megoldását ezekre mint legegyszerűbbekre igyekeznek visszavezetni. Talán meglepő, hogy a permutációk, kombinációk, variációk számának meghatárokása nálunk a két tétel *következményeként* adódik; anélkül számoltuk meg a lehetőségeket a két fő feladatban, hogy ezeknek az „elemi” feladatoknak a megoldását ismertnek feltételeztük volna. *A dolgozatban elsősorban a leszámlálások módszereit kívántuk bemutatni.* Ezekkel a módszerekkel számos kombinatorikai feladatot tudunk megoldani, gyakran anélkül, hogy bármiféle kész képletet használnánk.

A nyert eredményeknek megvannak a maguk érvényességi határai. A kiindulásul szolgáló három példa nem oldható meg általános képleteinkkel; e példák megoldása a lehetőségek közvetlen összeszámolását igényli, mert megfelelő képlet, amelyet alkalmazhatnánk, nem is létezik.

A második példának a bevezetés végén szereplő átfogalmazására viszont jól alkalmazható a 2. tételünk. Valóban, $l = 4$ (a gyerekek száma), k ugyancsak 4 (a gyümölcsfélék száma), és $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 2$. A 2. tétel szerint a lehetőségek száma

$$\frac{4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 5!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot (3!)^4} = 8000$$