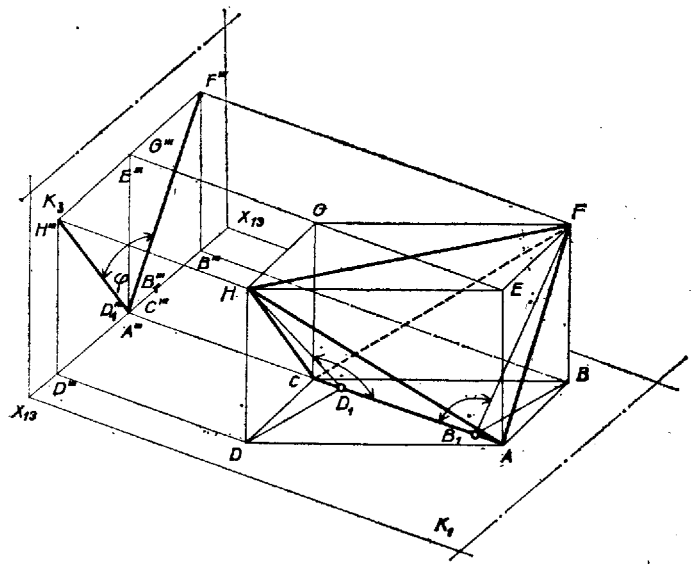
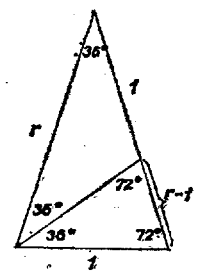
1. Legyen egy tetszés szerinti Q téglatest egy lapja $ABCD$, a rá merőleges élek AE, BF, CG, DH, és az éleinek hosszai $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$. Kiszemelve az A csúcsot, a szemben levő G csúcs szomszédai C, F, H, tehát egy az előírásnak (a csúcsok összeválogatása szempontjából) megfelelő tetraéder $ACFH = T$, és ehhez jutunk C, F, H bármelyikéből kiindulva is (1. ábra).





A tetraéder másik kiválasztási lehetősége $BDEG$, ez amannak tükörképe a Q-nak a középpontjára nézve, és több lehetőség nincs. Elég tehát T lapszögeit vizsgálnunk.

T lapszögei páronként egyenlők egymással, mert a Q bármelyik szemközti lappárjának középpontját összekötő tengely körüli 180°-os elfordítás T-t önmagába viszi át. Eszerint T 6 élénél szemben levő páronként egyenlő a lapszög, csak 3 szögértéket kell majd kiszámítanunk.

Az AC élű $F(AC)H = \varphi$ lapszöget valódi nagyságában látjuk T-nek az AC élre merőleges síkokon levő vetületében, amelyet Q-nak az ABC és DCG síkokkal párhuzamos képsíkokon levő vetületeiből alkalmas transzformációval kaphatunk meg. Eszerint φ az $F'''A'''H'''$ egyenlő szárú háromszög szárszöge,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{E'''F'''}{A'''F'''} = \frac{BB_1}{\sqrt{A'''E'''^2 + BB_1^2}} = \frac{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{c^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}, \tag{1}$$

ahol B_1 a B csúcs vetülete – és egyszersmind F-é is – az $ABCD$ téglalap átlóján, ugyanígy D_1 a D és H csúcsoké, és $E'''F''' = B_1B = D_1D = E'''H'''$.

2. Esetünkben célszerű a nagyságra nézve középső élhosszat hosszúságegységnek választani. Ekkor – a legnagyobb élhosszat q-val jelölve, azaz $q > 1$ – a legkisebb élhossz az első követelmény alapján $\dfrac{1}{q}$, továbbá a második követelmény szerint:

$$\frac{1}{q} + 1 = q, \quad \text{azaz} \quad q^2 - q - 1 = 0,$$

tehát Q élei csökkenő rendben:

$$q = \frac{\sqrt{5}+1}{2} (= 1{,}618), \qquad 1, \qquad \frac{1}{q} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (= 0{,}618). \tag{2}$$

Az ezek páros szorzataiból (1) céljára alakított négyzetösszeg értéke 4, eszerint c-nek (1)-beli szerepét egymás után a (2)-beli értékeknek átadva, a és b szerepét pedig mindig a további két élnek, a fenti $AC = \sqrt{a^2+b^2}$ élnél levő φ_1, φ_2, φ_3 lapszögre rendre

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{2q} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \sin\frac{\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\varphi_3}{2} = \frac{q}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\varphi_1 = 36^\circ, \qquad \varphi_2 = 60^\circ, \qquad \varphi_3 = 108^\circ,$$

amiből φ_2 közismert, φ_1 és φ_3 pedig egyrészt abból adódik, hogy az egységnyi alapú és 36° szárszögű egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontjából húzott szögfelező úgy vágja ketté a háromszöget, hogy két darab egységnyi szárú háromszög keletkezik (2. ábra). Az egyik résznek az eredeti háromszöghöz való hasonlóságából, ennek szárát r-rel jelölve

$$1 : r = (r-1) : 1 (= 2\sin 18°), \qquad r > 1,\ r = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

a (2)-beli q érték, így

$$\sin 18° = \frac{1}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin 54° = \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Másrészt az a fenti φ_1, és φ_3 érték alapja, hogy a sinusfüggvény a $(0°, 90°)$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, minden értéket, amit fölvesz, csak egy helyen vesz föl.

Megjegyzés. A Q test éleinek meghatározásában ráismerünk a folytonos arány szerinti kettéválasztás (arany metszés) előírására, amit az 1358. gyakorlatban is láttunk.[1] Érdekes, hogy mindkét helyen rokonságot látunk a szabályos ötszöggel, ill. ennek szögeivel.

[1]Lásd ezen számban, 24. old.