Első feladat. *Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy (önmagát nem metsző) síkbeli n-szögnek?*

Megoldás. Jelölje k a sokszög hegyesszögeinek számát. Mivel minden hegyesszög kisebb, mint $90°$, a hegyesszögek összege kisebb, mint $k \cdot 90°$. A többi $n-k$ szögről csak annyit tudunk, hogy kisebbek, mint $360°$, így összegük kisebb, mint $(n-k) \cdot 360°$. Így az n-szög szögösszege kisebb, mint

$$k \cdot 90° + (n-k) \cdot 360° = n \cdot 360° - k \cdot 270°.$$

Másrészről azonban az n-szög szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$, tehát

$$(n-2) \cdot 180° < n \cdot 360° - k \cdot 270°,$$

ahonnan rendezés és $90°$-kal való osztás után

$$3k \leq 2n + 4$$

adódik. Mivel mindkét oldalon egész szám áll,

$$3k \leq 2n + 3,$$

és így

$$k \leq \frac{2n}{3} + 1.$$

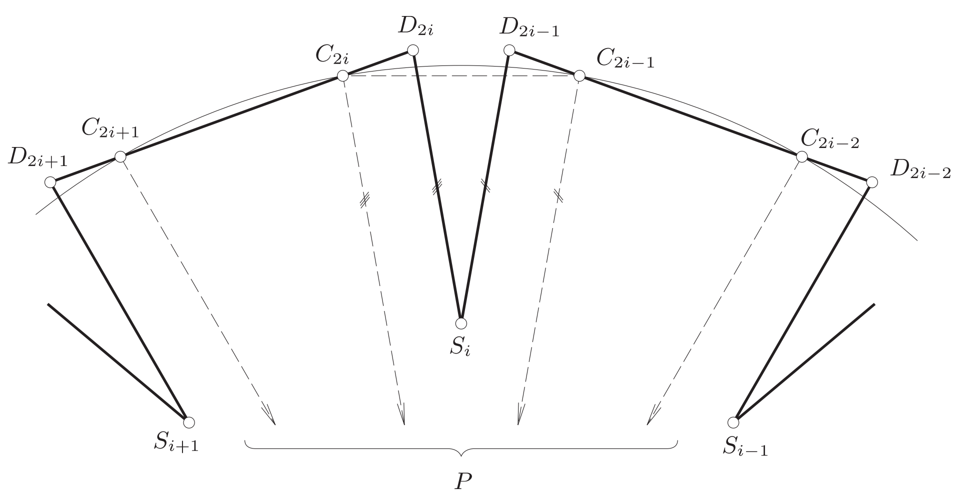
Így azt kaptuk, hogy egy síkbeli n-szögnek legfeljebb

$$\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$$

hegyesszöge lehet (a szögletes zárójel, mint szokásos, a szám egész részét jelöli).

Hozzátartozik még a feladathoz annak megmutatása, hogy ez a korlát el is érhető; más szóval, olyan n-szöget kell konstruálnunk, melyben a hegyesszögek száma pontosan $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$.

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor n 3-mal osztható, vagyis $n = 3r$. Ekkor $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2r + 1$.

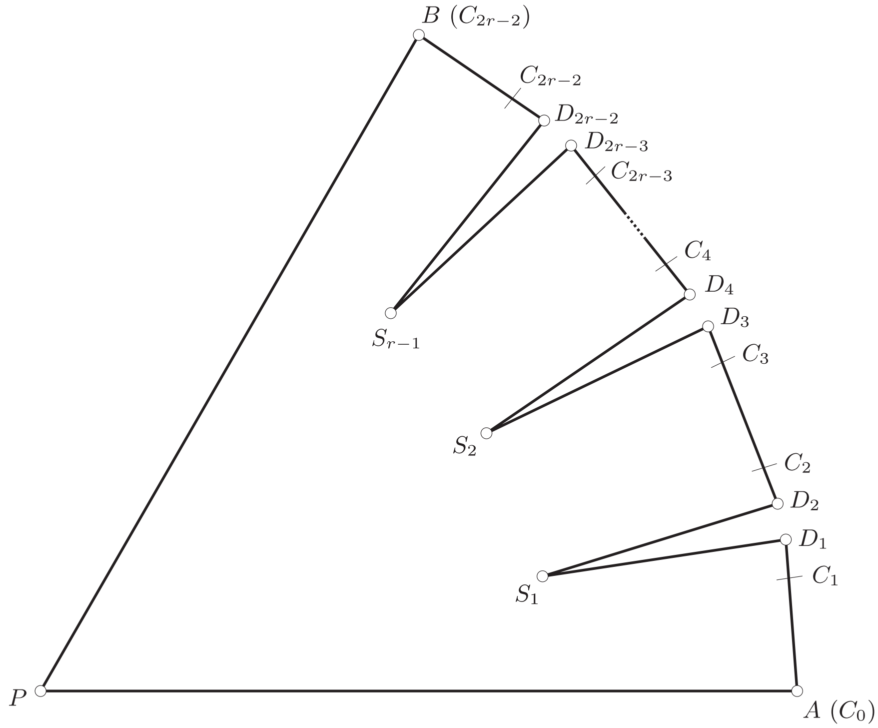


1. ábra

Tekintsünk egy $60°$-os körcikket, legyen a körív két végpontja A és B, a körcikk csúcsa P, és osszuk az AB ívet a C_1, $C_2, \ldots, C_{2r-2}$ pontokkal $2r-1$ egyenlő részre. Jelölje S_i a $C_{2i-1}PC_{2i}$ háromszög súlypontját ($i = 1, \ldots, r-1$). Húzzunk S_i-n át párhuzamost PC_{2i-1}-gyel, és messe ez a $C_{2i-2}C_{2i-1}$ egyenest D_{2i-1}-ben, C_0-on A-t értve. Hasonlóképpen legyen D_{2i} a PC_{2i}-vel párhuzamos, S_i-n áthaladó egyenesnek és $C_{2i}C_{2i+1}$-nek metszéspontja, C_{2r-1}-en B-t értve (1. ábra). Tekintsük mármost a következő sokszöget:

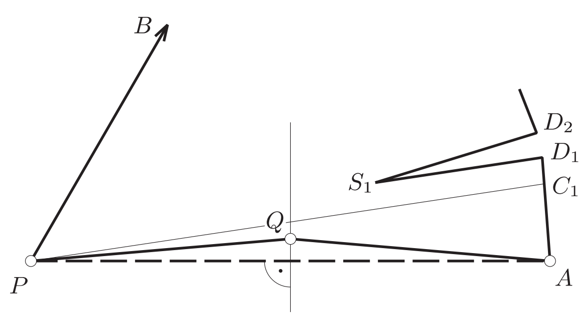
$$\Sigma = PAD_1S_1D_2D_3S_2D_4 \ldots D_{2i-1}S_iD_{2i}D_{2i+1}S_{i+1} \ldots D_{2r-3}S_{r-1}D_{2r-2}BP$$

(2. ábra). Ennek nyilván $3r$ csúcsa van és $2r+1$ hegyesszöge a P, A, D_1, $D_2, \ldots, D_{2r-2}$, B csúcsok mindegyikénél hegyesszöge van. Ugyanis az APB szög $60°$, a PAD_1 szög a PAC_1 egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyike, tehát hegyesszög, az AD_1S_1 szög pedig ezzel egyenlő, hiszen AD_1S_1 és AC_1P párhuzamos szárú szögek. A többi felsorolt szögről hasonlóan látható be, hogy hegyesszögek.



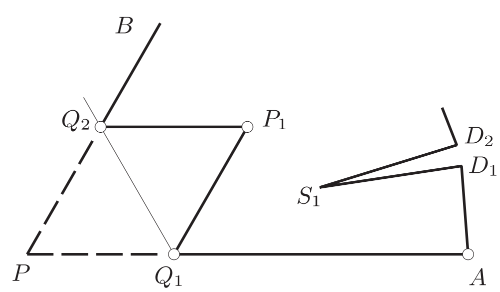
2. ábra

Másodszor azzal az esettel foglalkozunk, amikor n 3-mal osztva 1-et ad maradékul, vagyis $n = 3r + 1$. Ekkor $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2r + 1$. Az előzőek szerint tudunk olyan $3r$-szöget szerkeszteni, melynek $2r + 1$ hegyesszöge van. Tekintsük az előzőekben megszerkesztett Σ sokszöget, és az AP oldal felező merőlegesén válasszunk egy olyan Q pontot, mely benne van a PAC_1 háromszögben. Ekkor $QAC_1\sphericalangle < PAC_1\sphericalangle$ és $QPB\sphericalangle < APB\sphericalangle$, tehát hegyesszögek, így a Σ sokszög AP oldalát az AQP töröttvonallal helyettesítve olyan Σ' $(3r + 1)$-szöget kapunk, melyben $2r + 1$ hegyesszög van (3. ábra).



3. ábra

Végül tekintsük az $n = 3r+2$ esetet. Tekintsük ismét a $3r$ csúcsú Σ sokszöget. Legyen PA, ill. PB (P-hez közelebbi) harmadolópontja Q_1, ill. Q_2, és P-nek Q_1Q_2-re való tükörképe P_1. Ekkor a Σ sokszög AP, PB oldalait az $AQ_1P_1Q_2B$ töröttvonallal helyettesítve olyan Σ'' sokszöget kapunk, melynek $3r + 2$ csúcsa és $2r + 2 = \left[\frac{2n}{3}\right] + 1$ hegyesszöge van, hiszen a P helyett fellépő három csúcs közül kettőben, Q_1-ben és Q_2-ben $60°$-os, vagyis hegyesszög van (4. ábra).



4. ábra

Megjegyzések. 1. Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy a Σ, Σ', Σ'' sokszögek nem metszik át önmagukat.

2. Számos más módon is konstruálható n szögpontú, $\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$ hegyesszöggel rendelkező sokszög. Több versenyző teljes indukcióval definiálta ezeket, n-ről $n+3$-ra lépve (ekkor $n=3$, 4, 5 esetére meg kell adni egy-egy példát, ami nyilvánvaló). A legtöbb megoldásban Σ a fentihez hasonlóan volt megalkotva, de belőle Σ'-t és Σ''-t már igen sok különböző módon készítették el a versenyzők.

3. Több versenyző megjegyezte, hogy ha csak konvex sokszögekre szorítkoznánk, a hegyesszögek maximális száma 3 volna.

Második feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (amelyek különbsége 1)?*

I. Megoldás. Jelölje p a kérdezett valószínűséget, k pedig az első 90 számból kiválasztható azon számötösök számát, melyekben nincsen két szomszédos. Mivel az összes lehetséges lottóhúzások száma $\binom{90}{5}$, azért

$$p = 1 - \frac{k}{\binom{90}{5}},$$

így tulajdonképpen a k szám meghatározása a feladat.

Tekintsünk egy olyan

$$1 \le a < b < c < d < e \le 90$$

számötöst, melyben nincs két szomszédos azám. Ekkor az

$$a, \qquad b-1, \qquad c-2, \qquad d-3, \qquad e-4$$

számötös számai különbözők, és 1 és 86 közé esnek. Megfordítva, minden

$$1 \le a' < b' < c' < d' < e' \le 86$$

számötös esetén

$$a', \qquad b'+1, \qquad c'+2, \qquad d'+3, \qquad e'+4$$

olyan számötös, melynek mindegyik eleme 1 és 90 közé esik, és nem tartalmaz szomszédos számokat. Így k egyenlő az első 86 számból kiválasztható számötösök számával, vagyis

$$k = \binom{86}{5}.$$

Innen

$$p = 1 - \frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}} = 1 - \frac{86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = 0{,}2\ldots$$

II. Megoldás. Az előző megoldásban talált k számot más ötlettel is meghatározhatjuk. Tekintsünk egy sorban 90 egyforma golyót, egy kicsit ferde vályúban és emeljük ki az a-adikat, b-ediket, c-ediket, d-ediket és e-ediket, ahol a, b, c, d, e egy olyan lottószámötös, amely nem tartalmaz szomszédos egészeket. A visszamaradó golyók összegurulnak, és egy 85 golyóból álló láncot alkotnak. k ármost annak számát jelenti, ahányféleképpen 5 nem szomszédos golyót a 90-ből ki lehet emelni; vagyis, megfordítva, ahányféleképpen a 85 golyóból álló láncba 5 golyót be tudunk iktatni úgy, hogy ne legyen közöttük két szomszédos. Egy ilyen „beiktatást” azzal jellemezhetünk, hogy megmondjuk, a lánc 86 „golyóköze” közül melyik 5-öt választjuk ki (a lánc eleje és vége is „köz”-nek számít, ezért 86 a számuk). Vagyis

$$k = \binom{86}{5}.$$

Megjegyzések. 1. Ha n számból m-et húzunk, akkor annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között van legalább két szomszédos:

$$1 - \frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

2. Az első megoldás gondolatmenete segítségével az is belátható (ez az általánosítás *Ruzsa Imre* dolgozatában szerepelt), hogy ha megadunk c_1, $c_2, \ldots, c_{m-1}$ természetes számokat, akkor annak a valószínűsége, hogy az első n természetes számból kihúzott $1 \le a_1 < \ldots < a_m \le n$ szám-m-esre

$$a_2 - a_1 > c_1, \qquad a_3 - a_2 > c_2, \qquad \ldots, \qquad a_m - a_{m-1} > c_{m-1}$$

álljon fenn, éppen

$$\frac{\binom{n - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m-1}}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Ennek belátásához azt jegyezzük meg, hogy ha $(a_1, \ldots, a_m)$ ilyen szám-m-es, akkor

$$1 \le a_1 < a_2 - c_1 < a_3 - c_1 - c_2 < \ldots < a_m - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m-1} \le n - c_1 - \ldots - c_{m-1},$$

és viszont.

3. A magyar lottóhúzások 1957-től 1971. március végéig lefolyt 738 húzása közül 146-ban fordult elő a vizsgált számszomszédosság, éspedig a számötösöket növekvően rendezve az 1. és 2. helyen álló számok között 39 esetben, a további szomszédos helyek között rendre 27, 41, 39 esetben.

Harmadik feladat. *Adva van n pont, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Az általuk meghatározott szakaszok közül néhányat pirossal, néhányat kékkel rajzoltunk be úgy, hogy a megszínezett szakaszok mentén haladva bármelyik pontból bármelyik pontba el lehessen jutni, de csak egyféleképpen. Bizonyítandó, hogy a pontok által meghatározott, még meg nem színezett szakaszok kifesthetők kékre vagy pirosra úgy, hogy az adott pontok által meghatározott bármelyik háromszög oldalai között páratlan számú piros legyen.*

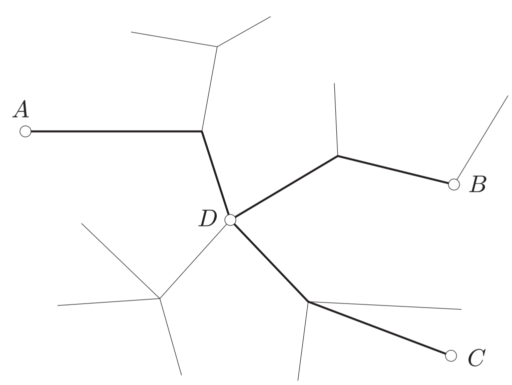
I. Megoldás. Megadunk egy utasítást arra, hogyan kell a még nem színezett szakaszokat színezni. Legyen AB egy olyan szakasz, amelynek végpontjai az adott pontok közül valók és amely még nincs kiszínezve. A feltétel szerint létezik egy és csakis egy olyan törött vonal, mely eredetileg színezett szakaszokból áll és A-t B-vel köti össze. Jelölje V_{AB} ezt a törött vonalat. Legyen mármost az AB szakasz

kék, ha V_{AB} páratlan sok kék szakaszt tartalmaz és legyen
piros, ha V_{AB} páros sok kék szakaszt tartalmaz.

(Megjegyezzük, hogy ez a „színezési szabály” akkor is érvényes, ha AB már eleve is színezett volt.)

Megmutatjuk, hogy a fenti „színezési szabály” kielégíti a feladat követelményeit. Legyen e célból ABC tetszőleges háromszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók.

Először is *megadható olyan D pont, melyből az A-ba, B-be, C-be vezető, eredetileg színezett szakaszokból álló V_{DA}, V_{DB}, V_{DC} utaknak nincsen D-től különböző közös pontjuk* (megengedjük itt, hogy D egybeessen pl. A-val, ekkor V_{DA} egyetlen pontból áll). Tekintsük ugyanis az A-t B-vel összekötő, eredetileg színezett szakaszokból álló V_{AB} utat. C-ből A felé elindulva a V_{CA} úton, előbb-utóbb elérjük a V_{AB} út valamely D pontját (ha C rajta fekszik a V_{AB} úton, akkor $D = C$; természetesen az is előfordulhat, hogy $D = A$ vagy $D = B$). Könnyen látható, hogy az így megszerkesztett D pont a fenti kikötésnek eleget tesz (5. ábra).



5. ábra

Mármost a fenti színezési szabály szerint, az AB, BC, AC szakaszok között rendre annyi kék van, ahány páratlan szám előfordul az

$x =$ a V_{DA} és V_{DB} utakon fekvő kék szakaszok száma,
$y =$ a V_{DB} és V_{DC} utakon fekvő kék szakaszok száma és
$z =$ a V_{DC} és V_{DA} utakon fekvő kék szakaszok száma között.

Mivel $x+y+z$ páros (hiszen V_{DA}, V_{DB}, V_{DC} utak minden kék szakasza kétszer van beszámítva ebbe az összegbe), az ABC háromszögnek valóban páros sok kék oldala van.

II. Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges A_0 pontot és színezzük ki sárgára. Ezek után a többi pontot is kiszínezzük sárgával és zölddel a következőképpen: egy A_0-ból kiinduló, eredetileg is színezett szakaszokból álló törött vonal mentén haladva, az i-edik pont legyen az $(i-1)$-edikkel azonos színű, ha a kettőt összekötő szakasz piros, és különböző színű, ha az összekötő él kék. Mivel a feltétel szerint bármely pontba egy és csakis egyféleképpen juthatunk el ilyen törött vonalon, azért minden pont színe egyértelműen meg van határozva.

Ezek után a következő „színezési szabályt" adhatjuk meg: az AB él legyen

piros, ha A, B mindegyike zöld vagy mindegyike sárga, és legyen
kék, ha A, B különböző színűek.

Megállapíthatjuk, hogy az eredetileg megszínezett szakaszok e „színezési szabálynak" megfelelően vannak színezve.

Tekintsünk ármost egy tetszőleges ABC háromszöget, melynek csúcsai az adott pontok közül valók. Ha A, B, C azonos színűek, akkor az AB, BC, AC szakaszok mindegyike piros. Ha, mondjuk A és B azonos és C tőlük különböző színű, akkor AB piros, AC és BC kék. A piros szakaszok száma tehát vagy 3 vagy 1, mindenképpen páratlan. Tehát a megadott „színezési szabály" a feladat kikötésének eleget tesz.

Megjegyzések. 1. Több dolgozat a pontok száma szerinti teljes indukcióval igazolta az állítást.

2. Megmutatható – erre több versenyző utalt is –, hogy a szakaszoknak a feladatbeli színezése egyértelmű. Legyen ugyanis AB tetszőleges szakasz. A feltétel szerint A és B összeköthető egy, eleve színezett élekből álló

$$\overline{A_0A_1\ldots A_n} \qquad (A_0=A, \quad A_n=B)$$

törött vonallal. Mármost az $A_0A_1A_2$ háromszögben páratlan sok piros élnek kell lennie, ez meghatározza az A_0A_2 szakasz színét. Így az $A_0A_2A_3$ háromszögben már két szakasz színe adott, ez meghatározza az A_0A_3 szakasz színét. Hasonlóan továbbmenve láthatjuk, hogy az AB szakasz színe is egyértelműen meg van határozva.

3. Elegendő volna a feladatban annyit feltenni, hogy bármely két pont *legfeljebb* egyféleképpen köthető össze eredetileg is megszínezett szakaszokból álló törött vonallal. Ilyenkor ugyanis (mint az könnyen igazolható) meg lehet még néhány további szakaszt színezni úgy, hogy a kapott szakaszokra már a feladat feltétele teljesüljön.