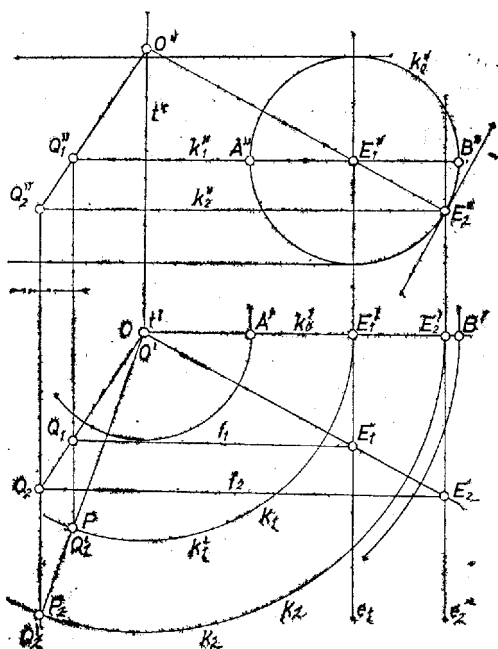


A lapunkban kitűzésre kerülő feladatok, kérdések különböző eredetűek. Némelyeknek „nagy” múltjuk van, több példatárban, tankönyvben, versenyen szerepeltek már, legutóbb pl. többen is rámutattak az 1729. feladat és az 1939. évi Eötvös Loránd matematikai tanulmányverseny 3. feladata közti kapcsolatra. Némely feladatokon alkalmilag „csavarunk” egyet, azaz pl. megváltoztatunk számadatokat, vagy több föltétel előírásával szűkebbre szorítjuk a feladatot, másokat viszont éppen ellenkezőleg általánosabban fogalmazzunk meg. Esetenként véletlen észrevételből adódik a kérdés, mint pl. az 1715. feladat a szerkesztő bizottsági megbeszélés napján lefolyt lottóhúzásból. – Kevésbé alkalmi módon, mégis elég távoli kapcsolatból eredt az 1723. feladat¹, alább ezt mutatjuk be.

Ez a feladat egy – Monge-féle (két képsíkos) rendszerben végrehajtott – ábrázoló geometriai szerkesztésből letlekezett olyan nem lényeges változtatásokkal, mint mellőzhető vonalak elhagyása, az egyik képnek a képsíkrendszer tengelyére merőleges eltolása, szokásos jelöléseknek, továbbá a vonalak megrajzolása időbeli sorrendjének megváltoztatása. E változtatásokat visszaállítva térbeli értelmezését adjuk az ábrának, és az egyszerűsített új bizonyítása is lesz az állításnak.

Toljuk el az ottani O, E_1, E_2, Q_1, Q_2 pontok együttesét i irányban alkalmas távolságra az $O'', E_1'', E_2'', Q_1'', Q_2''$ helyzetbe; rajzoljuk meg E_1'' körül az E_2'' -n átmenő (azaz $E_1''E_2'' = E_1E_2$ sugarú) k_0'' kört és ennek az O'' egyenesre való tükörképét, k_{00}'' -t; írjunk P_j ($j = 1, 2$) és (az eredeti) O helyére Q_j', O' jelet, k_j helyére k_j' , az eltoló $E_j''Q_j''$ egyenesre k_j'' jelet; legyenek k_0'' és k_1'' metszéspontjai A'', B'' , írjunk kört O' körül e két pontnak $O'O''$ -től való távolságával; végül rajzoljuk meg k_0'' és k_{00}'' közös külső érintőinek az érintési pontok közti szakaszát, valamint valahol O' és O'' között i -re merőlegesen az $x_{1,2}$ tengelyt.



Ekkor az utóbbi két kör az első képen, a két érintőszakasz, valamint k_0'' -nek és k_{00}'' -nek $O'O''$ -től távolabbi félköréi a második képen annak a gyűrűfelületnek (ún. tórusznak) a képkörrajzát adják, amely úgy áll elő, hogy a térbeli (vagyis az O', O'' képekkel meghatározott) O ponton átmenő és az 1. képsíkra merőlegesen álló t tengely körül megforgatjuk azt a kört, melynek második képe k_0'' (tehát amelynek síkja párhuzamos a 2. képsíkkal és magában foglalja a t tengelyt). Az egyforma betűvel jelölt és ',-vel, ''-vel megkülönböztetett pontpárokat tekinthetjük egy-egy térbeli pont összetartozó első, ill. második képének, hiszen páronkénti összekötő egyenesaik merőlegesek $x_{1,2}$ -re. Továbbá k_1', k_2' egy-egy az első képsíkkal párhuzamos síkban fekvő kör első képének tekinthető, k_1'' és k_2'' pedig – pontosabban ezeknek egy-egy $2r_1$, ill. $2r_2$ hosszúságú szakasza, felezőpontjával az $O'O''$ egyenesen (amin rajta van a forgástengely t'' képe) –, ugyanezen köröknek második képe. k_1 -et a forgatott k_0 kör középpontja írja le (az E_1', E_1'' képekkel meghatározott, azaz a térbeli E_1 helyzetből kiindulva), ez a tórusz ún. középköre, k_2 -t pedig hasonlóan az E_2 (E_2', E_2'') pont; és e két forgó pontnak helyzete a mozgás egy bizonyos pillanatában a térbeli Q_j (Q_j', Q_j'') pont, mert felvétel folytán az OP_1 , azaz $O'Q_1'$ félegyenes egy az első képsíkra merőleges sík (ún. első vetítő sík) első képe, és e sík tartalmazza t -t. (Az ábrán P helyett P_1, k_2 helyett k_2' írandó.)

A térbeli E_2E_1 egyenes a megindulási helyzetben merőlegesen áll k_0 -nak E_2 -beli érintőjére és így a tórusz E_2 -beli érintősíkja is, amit k_0 -nak és k_2 nek E_2 -beli érintői határoznak meg; eszerint az E_2E_1 egyenes a tórusz E_2 pontbeli ún. normálisra. Másrészt a fentiek szerint E_2E_1 metszi t -t, ez a pont O (O', O''). Ha a forgatás folyamán az érintősíkot és normálisát is forgatjuk, úgy az előbbi minden helyzetében érinti a tóruszt, a normális pedig minden helyzetben ugyanott metszi t -t. Ennek a normálisnak egy pillanatban elfoglalt helyzete a (térbeli) Q_1Q_2 egyenes, ezért második képe, $Q_1''Q_2''$ átmegy O'' -n, amint a feladat állítja.

¹Lásd ezen számban, 153. old.

A feladatban leírt ábra tehát úgy keletkezett, hogy egy t első vetítőegyenes tengelyű és k_1 középkörű tóruszon felvettünk képeivel egy k_2 párhuzamos kört – E'_2, E''_2 felhasználásával –, e körön egy rendezővonallal kijelöltük E_2 egy pillanatnyi helyzetének, Q_2 -nek képeit. Ezután az E_2 -beli normális második képén megkerestük a t -n levő O pontjának 2. képét, és ekkor a Q_2 -beli normális képei Q''_2O'', Q'_2O' (természetesen a Q_1 megfelelő képén át). Végül a két képet i irányában úgy toltuk össze, hogy O', O'' egybeessenek és a fölösleges vonalakat elhagytuk.

A normális képeinek megszerkesztése egyébként nem öncélú feladat, hanem előkészítője lehet további szerkesztéseknek; ezek azonban már túl messze vezetnének.

Tegyük végezetül egy olyan megjegyzést, amely szinte majdnem minden efféle szerkesztésre érvényes. Az $x_{1,2}$ tengely fölvételét említettük, de nem rajzoltuk, amint még néhány más vonalat sem, az olvasóra hagytuk. Ez a szerkesztésben semmi hiányt nem okozott. Azt mutatja ez, hogy a tengely helyzetének nincs nagyobb jelentősége, sokkal fontosabb a sűrűn felhasznált i irány.