Az alábbiakban az inverzióra vonatkozó feladatokat közlünk. E feladatok megoldását bárki beküldheti a szokásos módon: minden feladat megoldását külön lapon kérjük, beküldési határidő 1971. április 25. Kérjük a versenyzőinket, hogy pályázatunkra küldött megoldásaikat külön borítékba tegyék, a borítékra írják rá, hogy „Pályázat az inverzióról”. A közölt feladatok alkalmazását három példán mutatjuk be. Az inverzióra vonatkozó szükséges ismeretek megtalálhatók például a K. M. L. 37. kötet 97–101. oldalán (1968. november). Megemlítjük továbbá, hogy az inverzióval kapcsolatos a pontversenyen kívül közölt 12., 28., 31. és 44. probléma.

1. feladat. Legyen az inverzió alapkörének középpontja O, sugara r, a sík két tetszőleges, O-tól különböző pontja Q és S, ezek inverze Q' és S'. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{Q'S'}{QS}=\frac{OS'}{OQ}=\frac{OQ'}{OS}.$$

I. példa (Apollóniosz kör). Adott a síkban két különböző pont, A és B, továbbá egy pozitív valós szám $\lambda(\lambda\neq 1)$. Azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, melyek A-tól λ-szor akkora távolságra vannak, mint B-től, egy kör, melyre A-t invertálva B-t kapjuk.

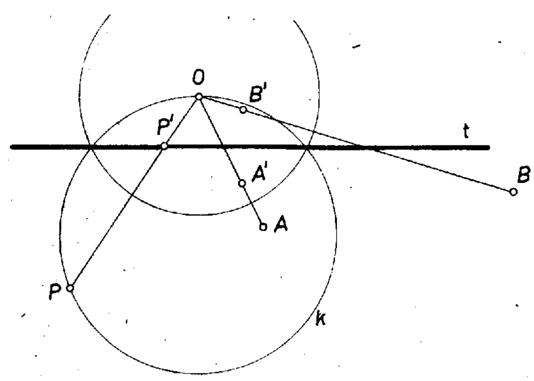
Állításunkat a $\lambda=1$ esetre vezetjük vissza az inverzió segítségével. Legyen egyelőre az inverzió alapköre tetszőleges (középpontja O, sugara r), az adott A, B pontok és a tetszőleges P pont inverze A', B', P'. (Feltesszük, hogy A, B, P és O különbözőek.) Az 1. feladat alapján

$$\frac{A'P'}{AP}=\frac{OP'}{OA},\qquad \frac{B'P'}{BP}=\frac{OP'}{OB},$$

tehát

$$\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{AP}{BP}=\frac{OB}{OA}.$$

Válasszuk O-t úgy, hogy a vizsgált mértani helyhez tartozzék, vagyis $OA=\lambda OB$ legyen. (Könnyen látható, hogy van ilyen pont; 1. ábra)



1. ábra

Ekkor

$$\frac{A'P'}{B'P'}=\frac{OB}{OA}\cdot\frac{AP}{BP}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{AP}{BP},$$

így P akkor és csakis akkor lesz a vizsgált mértani hely O-tól különböző pontja, ha $A'P'=B'P'$, vagyis P' az $A'B'$ szakasz t felező merőlegesén van. t nem mehet át O-n, hiszen ekkor $OA'=OB'$ volna, és ebből $OA=OB$ következne, ami $OA=\lambda OB$ és $\lambda\neq 1$ miatt nem lehet. Eszerint a vizsgált mértani helyhez O-n kívül t pontjainak inverzei tartoznak. Ezek az inverz pontok egy O-n átmenő k kör O-tól különböző pontjai. A vizsgált mértani hely tehát a k kör.

A pontversenyen kívül közölt 31. probléma szerint, ha adott egy kör (vagy egyenes) és két pont, melyek az adott körre (vagy egyenesre) nézve inverz (vagy tükrös) párok, és az egész alakzatot egy tetszőleges alapkörre invertáljuk, az adott pontok olyan pontokba mennek át, melyek az adott kör (vagy egyenes) inverzére nézve (ami ismét kör vagy egyenes) inverz vagy tükrös párt alkotnak.

Eszerint abból, hogy az A', B' pontok a t tengelyre nézve tükrös párt alkotnak, következik, hogy A és B a k-ra nézve inverz pontpár, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

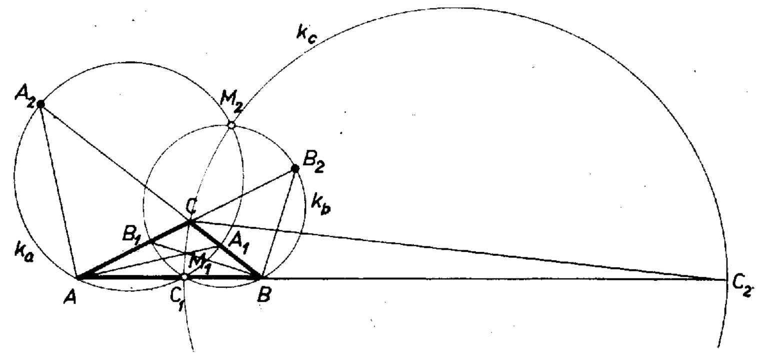
2. feladat. Adott a síkban 3 különböző pont: A, B, C. Szerkesszük meg azt a kört, amelyik átmegy C-n és amelyikre A-t invertálva B-t kapjuk.

3. feladat. Adott a síkban 3 különböző pont: A, B, C. Legyen k_a az A-n átmenő, B-t C-be vivő, k_b a B-n átmenő, C-t A-ba vivő, k_c, a C-n átmenő, A-t B-be vivő inverzió alapköre. Mutassuk meg, hogy van két pont, amelyeken e három kör mindegyike átmegy.

4. feladat. Adott a síkban 3 különböző pont: A, B, C. Jellemezzük azokat a köröket, melyekre invertálva az adott pontokat, a kapott A', B', C' pontokra $A'C' = B'C'$ teljesül.

5. feladat. Adott egy tetszőleges háromszög. Van-e olyan inverzió, mely a háromszög csúcsaihoz egy szabályos háromszög csúcsait rendeli hozzá?

II. példa. Legyenek az ABC háromszög oldalai különbözőek, a háromszög belső, ill. külső szögfelezői messék a szemközti oldalt az A_1, B_1, C_1, ill. A_2, B_2, C_2 pontokban, az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 szakaszok fölé rajzolt Thalész körök legyenek rendre k_a, k_b, k_c. Megmutatjuk, hogy van két pont, M_1 és M_2, melyeken e három kör mindegyike átmegy, és e körök $60°$-os szögben metszik egymást (2. ábra).



2. ábra

A feladatban szereplő pontokat a háromszög Miguel pontjainak nevezzük. Könnyen látható, hogy ha egyenlő szárú háromszögben a megfelelő kört oldalfelező merőlegessel helyettesítjük, feladatunk állítása érvényben marad, szabályos háromszögnek azonban csak egy ilyen pontja van. Állításunk egy részét tartalmazta az 1686. feladat.[1]

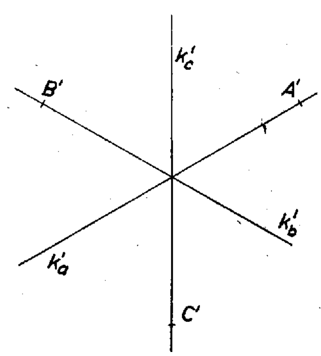
Ismeretes, hogy a háromszög szögfelezői olyan arányban osztják a szemközti oldalt, mint a szög szárain levő oldalak aránya, így

$$AC_1 : BC_1 = AC_2 : BC_2 = AC : BC.$$

A C_1, C_2, C pontok tehát rajta vannak az A, B pontokhoz és $\lambda = \dfrac{b}{a}$ számhoz tartozó Apolloniosz-körön (I. példa), ez az Apolloniosz kör tehát azonos k_c-vel és A-t k_c-re invertálva B-t kapjuk. Hasonló állítás mondható ki a k_b, k_a körökre is. Így M_1, M_2 létezését a 3. feladat állítása biztosítja.

Mivel A-t k_b-re invertálva C-be megy át, az M_1M_2 pontok pedig helyükön maradnak, az A, M_1, M_2 pontokon átmenő k_a körnek k_b-re vonatkozó inverze a C, M_1, M_2 pontokon átmenő k_c kör. Tudjuk, hogy az inverzió szögtartó, tehát k_a és k_c, a k_b-vel ugyanakkora szöget zárnak be, ami azt jelenti, hogy az M_1-en átmenő k_a , k_b, k_c köröket érintő e, f, g egyenesek közül az e és g az f-fel egyenlő szögeket zárnak be. (Mivel a körök metszik egymást M_1-ben, ezek az egyenesek különbözők.) Hasonló módon láthatjuk be, hogy g-vel az e és f egyenesek egyenlő szögeket zárnak be, tehát e három egyenes 6 egyenlő szöget határoz meg és e szögek $60°$-osak.

Állításunkat másképp is bebizonyíthatjuk: legyen k tetszőleges M_1 középpontú kör. k-ra invertálva a k_a, k_b, k_c, köröket egyeneseket kapunk, jelöljük ezeket k'_a, k'_b, k'_c-vel (3. ábra).



3. ábra

Ezek az egyenesek egy ponton mennek át, M_2 inverzén. Jelöljük A, B, C inverzét A', B', C'-vel: ezek rendre a k'_a, k'_b, k'_c, egyeneseken vannak. A 31. probléma már idézett állítása szerint abból, hogy A k_b-re vonatkozó inverze C, következik, hogy A' és C' a k'_b-re tükrősen helyezkednek el, tehát $A'B' = B'C'$. Hasonlóan kapjuk, hogy $A'B' = C'A'$, tehát $A'B'C'$ szabályosan háromszög, a k'_a, k'_b, k'_c egyenesek közti szögek $60°$-osak és mivel az inverzió szögtartó, ugyanekkorák a k_a, k_b, k_c körök közti szögek is.

[1]Lásd K. M. L. 41 (1970) 113. o.

6. feladat. Adott a síkban két kör, k_1 és k_2, melyek nem metszik egymást és egyik sincs a másik belsejében. Mutassuk meg, hogy két olyan pont van a síkban, melyek körül tetszőleges k kört rajzolva, a k_1, k_2 körök k-ra vonatkozó k_1', k_2' inverzei koncentrikus körök.

7. feladat. Adott a síkban két kör, melyeknek van közös belső érintőjük. Mutassuk meg, hogy van két pont a síkban, melyeken e körök tetszőleges közös (külső vagy belső) érintőjének az érintési pontok közti szakasza fölé rajzolt Thalesz kör átmegy.

8. feladat. Legyen k_1 az ABC háromszögbe írt kör, melynek középpontja O_1, és érintse k_1 az oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban. Mutassuk meg, hogy

a) az A, B, C pontok k_1-re vonatkozó A', B', C' inverzei rendre felezik a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakaszokat,

b) az ABC háromszög oldalegyeneseinek k_1-re vonatkozó inverzei az A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 szakaszok feletti Thalesz körök,

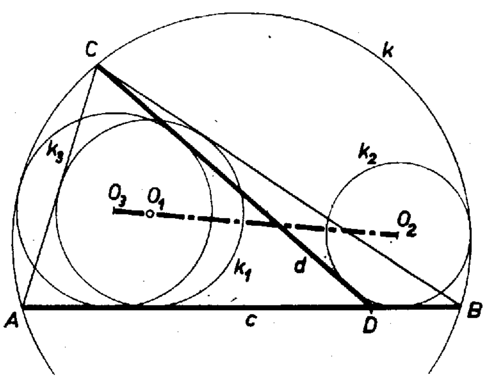
c) az ABC háromszög köré írható k kör inverze az $A_1B_1C_1$ háromszög Feuerbach köre.

9. feladat. Bizonyítsuk be *Euler* következő tételét: két adott körhöz (k-hoz és k_1-hez) akkor és csakis akkor van olyan háromszög, melynek k a körülírt, k_1 a beírt köre, ha

$$d^2 + r_1^2 = (r - r_1)^2,$$

ahol r, r_1 a k, k_1 sugara, d a középpontok távolsága.

III. példa (az 1969. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 4. feladatának[1] általánosítása). Legyen az ABC háromszög körülírt köre k, beírt köre k_1, az AB szakasz tetszőleges belső pontja D. Jelöljük az AB egyenest c-vel, a DC félegyenest d-vel. A c egyenest, a k kört és a d félegyenest érintő két kör legyen k_2 és k_3 (4. ábra).



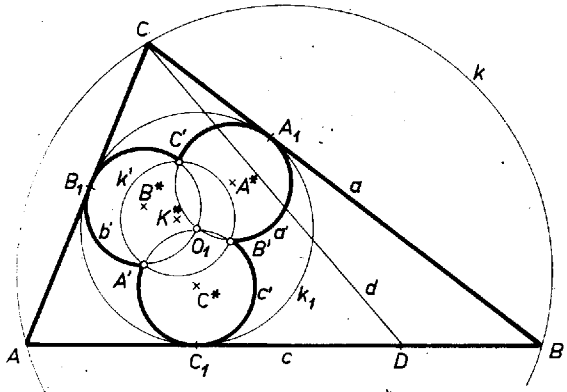
4. ábra

Megmutatjuk, hogy

a) a k_1, k_2, k_3 kör O_1, O_2, O_3 középpontja egy egyenesen van,

b) a k_1 kört a k_2, k_3 körök és a d félegyenes egyértelműen meghatározzák.

Állításunk *b)* része részletesebben a következőt jelenti. Legyen k_2 és k_3 két egymást nem metsző kör, középpontjuk O_2, O_3, közös külső érintőjük c és c_1. E körök egyik közös belső érintője messe c-t D-ben és legyen d ennek a belső érintőnek az a D-ből kiinduló félegyenese, amelyik c-nek ugyanazon az oldalán van, mint a k_2, k_3 kör. Legyen továbbá d és c_1 metszéspontjának, P-nek a vetülete az O_2O_3 centrálison, O_1, és legyen k_1, az O_1 körül írt, c-t érintő kör. Ekkor k_1 beírt köre lesz minden olyan háromszögnek, melynek csúcsait a c egyenesből és a d félegyenesből egy, a k_2, k_3 köröket kívülről érintő k kör metszi ki.

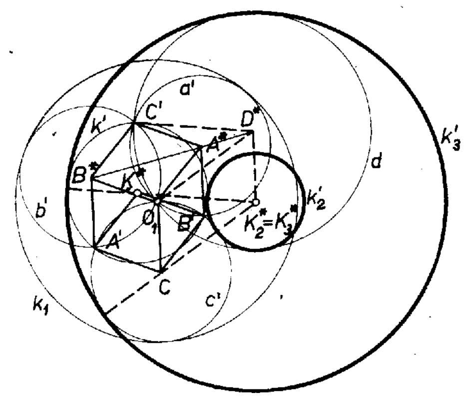


5. ábra

[1]Lásd K. M. L. 1680. feladat, 40 (1970) 152. o.

Állításunk *a)* részének a bizonyítása a következő. Jelöljük az ABC háromszög másik két oldalát a-val, b-vel, érintse k_1 az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban (5. ábra). A 8. feladat szerint a k_1 körre invertálva az ABC háromszög csúcsai az $A_1B_1C_1$ háromszög $A'B'C'$ középháromszögének a csúcsaiba mennek át. Az a, b, c oldalak a', b', c' inverze pedig az A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 szakaszok feletti Thalesz kör, jelöljük ezek középpontját rendre A^*-gal, B^*-gal, C^*-gal. Továbbá az ABC háromszög köré írt k kör k_1-re vonatkozó k' inverze pedig az $A'B'C'$ háromszög köré írható kör lesz, jelöljük ennek középpontját K^*-gal. Legyen d_1, k_2, k_3 vonal k_1-re vonatkozó inverze d', k_2', k_3', középpontjuk D^*, K_2^*, K_3^*. Azt fogjuk megmutatni, hogy K_2^* és K_3^* azonosak: ebből következik a bizonyítandó állítás, hiszen ekkor az O_1, K_2^*, K_3^* pontok nyilvánvalóan egy egyenesen vannak, tehát egy egyenesen vannak az O_1, O_2, O_3 pontok is.

Az a', b' körök a C', O_1 pontokban metszik egymást, így az $O_1A^*C'B^*$ négyszög rombusz (6. ábra).



6. ábra

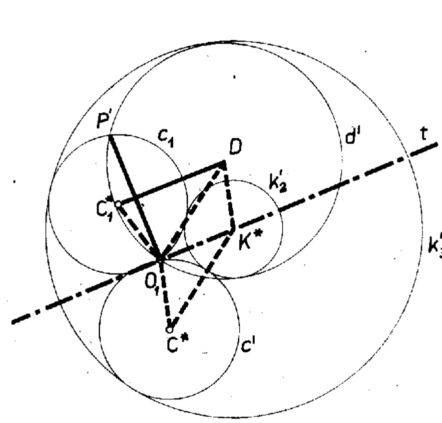
Hasonlóan látható be, hogy $O_1B^*A'C^*$ és $O_1C^*B'A^*$ is rombusz. Az a', k' körök egymást a B', C' pontokban metszik, így az $A^*B'K^*C'$ négyszög rombusz, és hasonlóan látható be, hogy $B^*C'K^*A'$ és $C^*A'K^*B'$ is rombusz.

A k_1-re való invertálás az a, b egyeneseknek a k_1-et nem tartalmazó oldalán levő pontokat viszi az a'; b' körök belsejébe. Mivel D az AB szakaszon van, k_1-re vonatkozó D' inverze az a', b' körökön kívül van. Emiatt a d' kör nem lehet teljes egészében az a', b' körök által lefedett síkrészben, vagyis D^* nem lehet az A^*B^* szakaszon, tehát a d' kör R sugara nagyobb az a', b', c', k' körök r sugaránál (ezek a körök egyenlő sugarúak, hiszen mindegyiknek az átmérője egyenlő k_1 sugarával).

A k_1-re való invertálás a k körön kívül levő pontokat, illetve a c egyenes O_1-et nem tartalmazó oldalán levő pontokat a k', illetve a c' kör belsejébe viszi, emiatt a k_2', k_3' körök a k', c' köröket kívülről érintik. Közülük az egyik belülről, a másik kívülről érinti d'-t, legyen az első a k_2' a második a k_3'. (Felhasználjuk, hogy adott három kört adott módon érintő kör egyértelműen van meghatározva, ha egyáltalán létezik.) Láttuk, hogy van olyan eltolás, amely az $A^*C'B^*O_1$ rombuszt a $B'K^*A'C^*$ rombuszba viszi (hiszen a megfelelő csúcsokat összekötő szakaszok párhuzamosak, és egyenlőek r-rel), vigye ez az eltolás a D pontot egy X pontba. X körül $(R-r)$ sugárral kört rajzolva a d' kört belülről érintő kört kapjuk, hiszen e két kör középpontjainak a távolsága egyenlő sugaraik különbségével, r-rel. Ez a kör kívülről érinti a c', k' köröket, hiszen középpontjaik távolsága egyenlő sugaraik összegével, R-rel. Ez a kör tehát a k_2', így $X \equiv K_2^*$. Hasonlóan látható be, hogy az X körül $(R+r)$ sugárral írt kört a c', k', d' körök belülről érintik, tehát ez a kör a k_3', és így $X \equiv K_3^*$, vagyis $K_2^* \equiv K_3^*$, amint azt bizonyítanunk kellett.

Állításunk *b)* részének a bizonyítása a következő. Legyen k_2, k_3, c, d adott, az ABC háromszöget határozza meg egy tetszőleges k kör és legyen egyelőre k_1 az ABC háromszög beírt köre. Megmutatjuk, hogy k_1 az általunk meghatározott módon is megszerkeszthető. Ismét a k_1 körre invertáljuk az alakzatot, felhasználjuk azokat az eredményeket, amelyeket az *a)* rész bizonyításánál kaptunk, és tovább használjuk ottani jelöléseinket.

Tükrözzük a c' kört az O_1, K_2^* pontok által meghatározott t tengelyre, a kapott kör legyen c_1', középpontja C_1^* (7. ábra).



7. ábra

c_1' inverze k_2 és k_3 másik közös külső érintője, tehát c_1' inverze a c_1 egyenes. Az $O_1D^*K_2^*C^*$ négyszög paralelogramma, melynek centrálszimmetriájából következik, hogy D^* és C^* egyenlő távolságra van t-től, a tükrözés folytán ugyanez igaz D^*-ra és C_1^*-ra, de ez a két pont már t-nek ugyanazon az oldalán van. D^* és C_1^* nem eshetnek egybe, mert akkor a d' és c_1' körök, illetve a d és c_1 egyenesek egybeesnének, ami lehetetlen, hiszen egyikük belső, másikuk külső érintője a k_2, k_3 köröknek. A $C_1^*D^*$ szakasz tehát párhuzamos t-vel, és így a c_1', d' körök O_1-en kívüli P' közös pontja O_1-gyel együtt t-re merőleges egyenest határoz meg. P' azonban c_1 és d metszéspontjának, P-nek inverze, tehát O_1-et megkaphatjuk a P-nek O_2O_3-ra történő merőleges vetítésével. Ezzel k_1 középpontját a k kör helyzetétől függetlenül meghatároztuk, sugarát pedig meghatározza az a tény, hogy ez a kör érinti c-t.

10. feladat. A 3. példához kapcsolódva mutassuk meg, hogy ha d merőleges c-re, akkor O_1 felezi az O_2O_3 szakaszt.