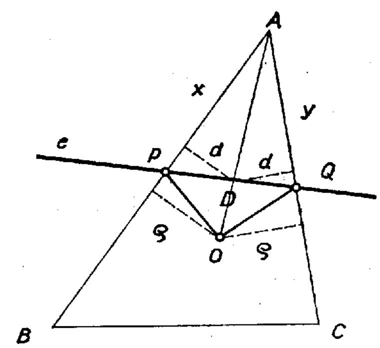
I. megoldás. Tegyük fel, hogy valamely e egyenes felezi az $ABC = H$ háromszög kerületét. Az e egyenes H-nak legalább két oldalszakaszát metszi, válasszuk úgy a betűzést, hogy e messe az AB, AC szakaszokat (de ne menjen át A-n), jelöljük a metszéspontokat rendre P-vel, Q-val, a H-ba írt kör középpontját O-val. Megmutatjuk, hogy az $APOQ$ négyszög területe egyenlő H területének a felével.



E négyszöget az AO egyenes két háromszögre vágja szét, amelyek AP, AQ oldalához tartozó magassága a H-ba írt kör sugara. Ezért a négyszög területe

$$t_1 = \frac{\varrho}{2}(AP + AQ).$$

Feltevésünk szerint $AP + AQ = s$ (a szokásos módon s a háromszög fél kerületét jelöli), tehát $t_1 = \dfrac{1}{2}\varrho s$. Ismeretes másrészt, hogy H területe egyenlő $\varrho \cdot s$-sel; $t = \varrho s$, tehát $t_1 = 1/2\, t$, amint azt bizonyítani akartuk.

Ha e a H területét is felezi, akkor az APQ háromszög területe is $t/2$-vel egyenlő, tehát APQ területe egyenlő az $APOQ$ négyszög területével. Ez csak úgy lehet, ha O a PQ egyenesen van, hiszen ha O az APQ háromszög belsejében volna, akkor az $APOQ$ négyszög területe kisebb volna APQ területénél, ha pedig O kívül volna az APQ háromszögön, akkor csak az AP, AQ egyenesek között, a PQ egyenes A-t nem tartalmazó oldalán lehetne, akkor pedig $APOQ$ területe nagyobb lenne APQ területénél. Tehát O rajta van a PQ egyenesen, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk. (Ábránk szándékosan torzított.)

Bizonyításunk azt az esetet is tartalmazza, ha P egybeesik B-vel,vagy Q egybeesik C-vel.

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldásban bevezetett jelöléseket, és az eredeti háromszög A csúcsához tartozó szögfelezőjének és a PQ egyenesnek a metszéspontját D-vel jelöljük. D egyenlő távol van az AP, AQ egyenesektől, jelöljük ezt a távolságot d-vel. Tegyük fel, hogy e felezi H területét is, kerületét is. Azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor $d = \varrho$, ebből már következik, hogy O rajta van a PQ egyenesen, hiszen d és ϱ csak akkor lehetnek egyenlőek, ha D és O azonosak.

Az APQ háromszöget az AD egyenes két háromszögre vágja szét, e részek területe $\dfrac{1}{2}\, d \cdot AP$, illetve $\dfrac{1}{2}\, d \cdot AQ$. Tehát APQ területe

$$\frac{1}{2}\, d(AP + AQ) = \frac{1}{2}\, ds,$$

viszont ez a terület $\dfrac{t}{2}$-vel is egyenlő, tehát $d = \dfrac{t}{s}$. Mivel $\dfrac{t}{s}$ a ϱ-val is egyenlő, ebből következik, hogy $d = \varrho$, amint azt bizonyítani akartuk.

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy mindig van olyan egyenes, amely H területét is, kerületét is felezi. Jelöljük az AP, AQ távolságokat rendre x-szel, y-nal. e felezi H területét is, kerületét is, ha

$$xy = \frac{bc}{2} \quad \text{és} \quad x + y = \frac{a+b+c}{2},$$

ahol a, b, c H oldalainak a hosszát jelöli. Ezek szerint x és y a

$$z^2 - \frac{a+b+c}{2}\, z + \frac{bc}{2} = 0 \qquad (1)$$

másodfokú egyenlet gyökpárjával egyenlőek. (1) bal oldalának az értéke $z = 0$ mellett $\dfrac{bc}{2}$, ami mindig pozitív, $z = b$ és $z = c$ mellett pedig $\dfrac{b}{2}\,(b - a)$, illetve $\dfrac{c}{2}\,(c - a)$. Ha például $c < a < b$, akkor (1) bal oldala a $z = 0$, c, b helyeken rendre pozitív, negatív, pozitív, tehát (1) egyik gyöke 0 és c, a másik c és b között van. Az elsőt választva x-nek, a másodikat y-nak, olyan szakaszokat kapunk, melyeket az AB, illetve AC egyenesre felmérve a szakaszok végpontjai H területét és kerületét is felező egyenest határoznak meg. (Gondolja át az olvasó a $c = a$ és $a = b$ eseteket is.)