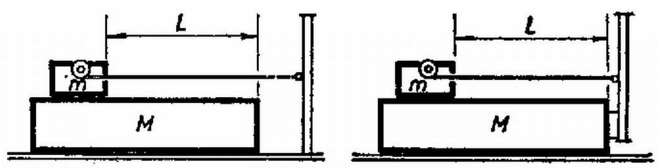
1. *$M = 1$ kg tömegű deszkán $m = 100$ gramm tömegű szán van, amely a benne levő motorral egy fonalat húz állandó $v_0 = 10$ cm/s sebességgel. Az asztal és a deszka között nincs súrlódás, a deszka és a szán között a súrlódási együttható $\mu = 0{,}02$ (1. ábra). A szerkezetet úgy indítjuk el, hogy a deszkát fogjuk addig, amíg a szán el nem ér v_0 sebességet, azután elengedjük. Ebben a pillanatban a szán és a deszka vége között a távolság $L = 50$ cm. a) esetben a fonál vége egy távoli cölöphöz, b) esetben magához a deszka végéhez van erősítve.*

Milyen mindegyik esetben a deszka és szán mozgásának lefolyása és mikor éri el a szán a deszka végét?



a) *b)*

1. ábra

Megoldás. a) esetben a szán egyenletesen mozog, közte és a deszka között sebességkülönbség van, tehát működik a lehetséges legnagyobb, μmg nagyságú súrlódási erő. Ez a deszkát $\mu mg/M = a$ állandó gyorsulással gyorsítja, tehát a deszka az asztalhoz képest nulla kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Ha a szán és a deszka egymáshoz viszonyított mozgását vizsgáljuk, akkor v_0 kezdősebességű, egyenletesen lassuló mozgást látunk. Ez addig tart, amíg a szán a deszkát magához fel nem gyorsítja. A felgyorsítás folyamatának ideje $t_0 = v_0/a = v_0 M/(\mu mg)$, a szán által ezalatt a deszkán befutott út $s_0 = v_0^2/(2a) = v_0^2 M/(2\mu mg)$. Számadatainkkal $t_0 = 5{,}1$ s, $s_0 = 0{,}255$ m $= 25{,}5$ cm. Tehát 5,1 s múlva a szán egyenletes mozgással viszi tovább a deszkát; eddig a szán jobb oldali vége 25,5 cm-t tett meg, tehát $50 - 25{,}5 = 24{,}5$ cm-re van a deszka végétől, azt sosem éri el.

A motornak nagyon ügyesen kell dolgoznia, hogy a $v_0 = 10$ cm/s=konstans feltétel teljesüljön. Először állandó μmg erővel kell húznia a fonalat. A deszka szánhoz való ragadásának pillanatától kezdve a motornak nem szabad erőt kifejtenie, legfeljebb egyszerűen felcsévélheti a fonalat, mert ekkor az egész szerkezet már tehetetlenül mozog tovább.

b) esetben, mivel a deszka nem súrlódik az asztalhoz, a szánból és deszkából álló rendszer zárt rendszer és alkalmazható rá az impulzusmegmaradás törvénye. Az elengedés után a szán sebességét v_1-gyel, a deszka sebességét v_2-vel jelöljük, mindegyiket az asztalhoz viszonyítva és jobb felé irányítva. Elengedéskor a rendszer összes impulzusa mv_0. Utána a rendszer impulzusa $mv_1 + Mv_2$. Ezek egyenlők:

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2.$$

A feladat szövege értelmében biztosítva van, hogy a sebességek különbsége

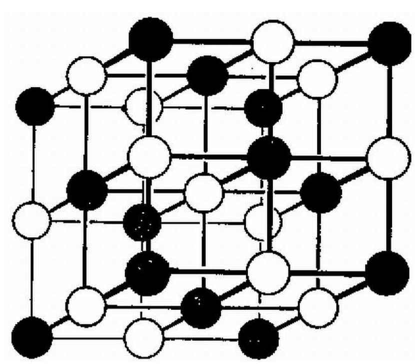
$$v_0 = v_1 - v_2.$$

Ezt az egyenletrendszert megoldjuk v_1 és v_2-re:

$$v_1 = v_0, \qquad v_2 = 0.$$

Tehát elengedés közben semmiféle változás sem következik be: a deszka állva marad és a szán ugyanúgy halad tovább. Mintha valaki egy görgőkön fekvő deszkán szaladna: ha a deszkát addig fogják, amíg egyenletes sebességét el nem éri, utána már elengedhetik a deszkát, az már nem mozdul meg. A mi feladatunkban a szán 50 cm : 10 cm/s = 5 s múlva érné el a deszka végét. A motornak a kísérlet közben állandó μmg erővel kell húznia a kötelet.

2. *A nátriumklorid kristályrácsát kocka alakú elemi cellák alkotják, amelyek élhosszúsága $5{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm. A felületen centrált rácsot a 2. ábra mutatja. A nátrium atomsúlya 23, a klóré 35,5. A nátriumklorid sűrűsége $2{,}22$ g/cm^3. Számítsuk ki a hidrogénatom tömegét.*



2. ábra

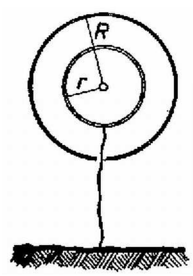
Megoldás. Jelentsék a fehér gömbök a nátrium-ionokat, a fekete gömbök a klorid-ionokat. A nátrium-ionokból egyet találunk a középen és 12 darabot az éleken. Ezekből a kocka belsejében csak negyedrész foglal helyet, tehát az elemi kockában levő nátrium-ionok száma $1 + 12/4 = 4$. A klorid-ionokból 6 foglal helyet az oldallapokon, ezek fele tartozik az elemi cellába és 8 van a csúcsokon, amelyekből csak nyolcadrész van az elemi cellában, tehát a klorid-ionok száma $6/2 + 8/8 = 4$. Ugyanerre az eredményre jutottunk volna, ha az elemi cella közepén klorid-ion lett volna.

Jelöljük a hidrogénatom tömegét m-mel. Ekkor 1 nátrium-ion tömege $23m$, 1 klorid-ion tömege pedig $35{,}5m$ (közelítően, nem C = 12 pontos atomsúlyokkal számolva). Az elemi cella tömegét osztva térfogatával kapjuk a sűrűséget:

$$\frac{4 \cdot 23m + 4 \cdot 35{,}5m}{(5{,}6 \cdot 10^{-8})^3} = 2{,}22.$$

Innen $m = 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gramm.

3. *$R = 20$ cm sugarú vékonyfalú fémgömb belsejében koncentrikusan egy $r = 10$ cm sugarú fémgolyót helyezünk el. A belső golyó a külső gömbön levő nyíláson keresztül egy nagyon hosszú vezetékkel földelve van (3. ábra). A külső gömbnek $Q = 10^{-8}$* coulomb *töltést adunk. Határozzuk meg a külső gömb potenciálját.*



3. ábra

Megoldás. Két kondenzátor párhuzamosan van kapcsolva, az egyiket a külső gömb és a belső gömb, a másikat a külső gömb és a föld alkotja. E két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor kapacitása összegezendő és akkor mindent ki tudunk számítani.

Megjegyzés: koncentrikus gömbfelületek által alkotott kondenzátor kapacitásának kiszámítása. A kapacitást megadja a töltés és potenciál hányadosa, a potenciál pedig az egységnyi töltés átvivési munkája. Ha a gömbhéj-kondenzátornak Q töltést adunk, akkor a középponttól x távolságban a térerő kQ/x^2. Az egységnyi töltés átvivési munkája joule-ban, vagyis a potenciálkülönbség:

$$U = \int_r^R \frac{kQ}{x^2} dx = kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Ezt felhasználva a gömbhéj-kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{1}{k} \cdot \frac{Rr}{R - r}.$$

Ha R igen nagy lesz r-hez képest, vagyis a gömb gyakorlatilag külön áll és a kondenzátor másik fegyverzete az igen messze levő föld, akkor kapjuk az ún. gömbkapacitást:

$$C = \frac{1}{k} \cdot r.$$

Felhasználva ezeket a képleteket, párhuzamosan kapcsolt kondenzátoraink eredő kapacitása:

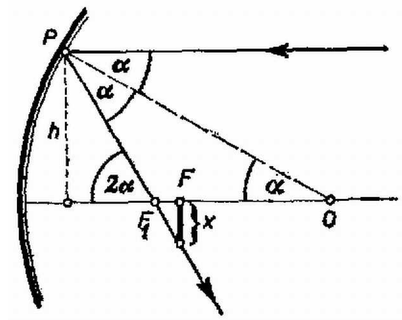
$$\frac{1}{k} \cdot \frac{Rr}{R - r} + \frac{1}{k} \cdot R = \frac{1}{k} \cdot \frac{R^2}{R - r}.$$

A mi adatainkkal $R = 0{,}2$ m, $r = 0{,}1$ m, $k = 9 \cdot 10^9$ és az eredő kapacitás $44{,}4 \cdot 10^{-12}$ farad= 44,4 pF. A potenciál pedig a földhöz képest $U = 10^{-3}$ volt: $44{,}4 \cdot 10^{-12} = 227$ volt.

4. *Egy 2 méter rádiuszú, 0,5 méter átmérőjű homorú gömbtükör fókuszába mekkora átmérőjű kör alakú felfogó ernyőt kell elhelyeznünk, hogy a tükörre a tengellyel párhuzamosan beeső valamennyi fénysugarat felfogja? Hányadrészre csökken az ernyővel felfogott fényáram, ha ebben a helyzetben a felfogó ernyő átmérőjét nyolcadrészre csökkentjük?*

Megoldás. Lényegében véve arról van szó, hogy elhanyagolás nélkül kell számítanunk a sugármenetet a homorú gömbtükörnél. (Lásd az 1958. évi Eötvös-verseny 3. feladatát.) De azért bizonyos geometriai, matematikai közelítéseket mégis alkalmazunk.

A $PO = R$ rádiuszú homorú gömbtükör elméleti fókusza a rádiusz felében, F-ben volna (4. ábra).



4. ábra

A tükör fél átmérőjét h-val jelöljük. Az α szög alatt beeső sugár P-ben visszaverődve F_1-ben metszi a tengelyt. Az egyenlő-szárú OPF_1 háromszögből $OF_1 = r/(2\cos\alpha)$ és így a fókusz eltérése az elméletitől:

$$F_1F = OF_1 - OF = \frac{r}{2\cos\alpha} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sec\alpha - 1).$$

Mi a felfogó ernyőt F-ben helyezzük el és keressük, hogy x rádiusza legalábbis mekkora legyen. Az F_1F alapú derékszögű háromszögből, a kis szögek esetében használható közelítésekkel:

$$x = F_1F\,\mathrm{tg}\,2\alpha \approx F_1F\sin 2\alpha \approx F_1F 2\sin\alpha = F_1F\cdot\frac{2h}{R} =$$
$$= \frac{r}{2}(\sec\alpha - 1)\cdot\frac{2h}{R} = h(\sec\alpha - 1).$$

Kis szögek cos-ára érvényes közelítés: $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, ezért kis szögeknél $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$. α radiánban értendő; újabb közeítéssel $\alpha \approx h/R$ és így végeredményünk a fókusz-folt rádiuszára:

$$x = \frac{h^3}{2R^2}.$$

A mi esetünkben $h = 50/2 = 25$ cm, $R = 200$ cm és így $x = 0{,}195$ cm $= 1{,}95$ mm.

A második kérdésnél vegyük figyelembe, hogy a tükör által felfogott egész fényáram h^2-tel arányos. Eredményünkből kifejezve h-t:

$$h = \sqrt[3]{2R^2x}.$$

Ha x helyébe kx rádiuszú ernyőt teszünk, akkor a számításba veendő új nyalábrádiusz:

$$h_k = \sqrt[3]{2R^2kx},$$

és a felfogott új fényáram:

$$h_k^2 = (\sqrt[3]{2R^2kx})^2 = h^2\cdot\sqrt[3]{k^2}.$$

A mi esetünkben $k = 1/8$ és így a felfogott fényáram a negyedére csökken.

Kísérleti feladat. Az asztalon rendelkezésre áll három lencse állványban, egy ernyő geometriai ábrával, mutatópálca, mérőszalag. Pusztán ezekkel az eszközökkel, különböző módszerekkel kell a fókusztávolságckat meghatározni.

Néhány lehetséges eljárás. Gyűjtőlencsénél megfigyeljük szemmel a virtuális kép eltűnését és lemérjük ekkor a tárgy – lencse távolságot. Gyűjtőlencsénél szemmel nézzük a reális képet, a parallaxis segítségével helyére állítjuk a mutatópálcát, lemérjük a kép- és tárgytávolságot, azután a lencsetörvényből számítjuk a fókusztávolságot. A szórólencsénél egy gyűjtőlencsével gyűjtőlencse-rendszert állítunk össze, ennek fókusztávolságát az előbbi módszerekkel mérjük le, azután az eredő gyújtótávolságból számítjuk a szórólencse fókusztávolságát.