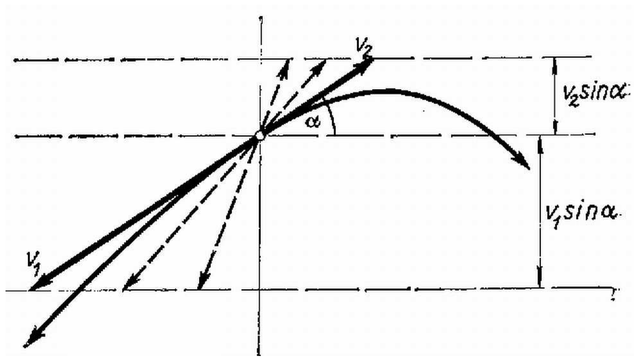
1. *Függőlegesen felfelé lőtt lövedék a legnagyobb magasság elérésekor $m_1 = 3$ kg és $m_2 = 6$ kg tömegű részekre robbant szét. A két rész a fellövés helyétől egyenlő távolságokban $T = 4$ másodperces időkülönbséggel ért talajt. Mekkora magasságban robbant szét a lövedék? (A levegő közegellenállását ne vegyük figyelembe.)*

(Párkányi László)

Megoldás. A robbanás pillanatában a lövedék nyugalomban volt és részei ellentétes irányokban, α szögben repültek szét v_1 és v_2 kezdősebességekkel (1. ábra).



1. ábra

Az impulzustörvény értelmében $m_1v_1 = m_2v_2$. Jelöljük a tömegek arányát k-val, akkor a sebességek aránya $1/k$:

$$k = \frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

A robbanástól a földetérésig t_1, ill. t_2 idő telt el. A távolságok egyenlőségéből:

$$v_1 \cos\alpha \cdot t_1 = v_2 \cos\alpha \cdot t_2.$$

Tehát az idők hányadosát ugyanaz a k adja meg:

$$k = \frac{t_2}{t_1}. \tag{1}$$

Másrészt tudjuk, hogy az időkülönbség:

$$t_2 - t_1 = T. \tag{2}$$

Az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszer megoldása adja az időtartamokat:

$$t_1 = \frac{T}{k-1}, \qquad t_2 = \frac{kT}{k-1}. \tag{3}$$

A robbanás helyének h magassága, (1) felhasználásával:

$$h = v_1 \sin\alpha \cdot t_1 + \frac{g}{2} \cdot t_1^2 = kv_2 \sin\alpha \cdot t_1 + \frac{g}{2} \cdot t_1^2, \qquad h = -v_2 \sin\alpha \cdot t_2 + \frac{g}{2} \cdot t_2^2.$$

Ez a két egyenlet egyenletrendszer h és $v_2 \sin\alpha$ számára. A (3) alatti értékek felhasználásával a megoldások:

$$h = \frac{g}{4} \cdot \frac{k^2+1}{(k-1)^2} \cdot T^2, \qquad v_2 \sin\alpha = \frac{g(k+1)}{4k} \cdot T.$$

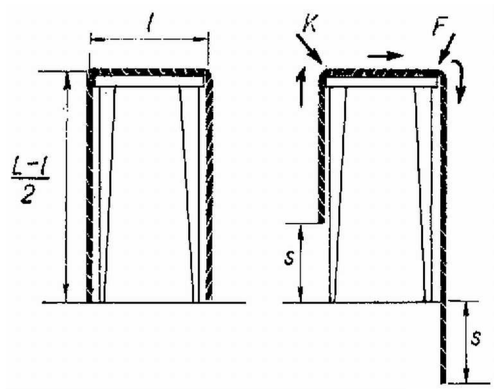
Mivel $t_2/t_1 = m_2/m_1$, azért $m_2 > m_1$ esetén $t_2 > t_1$ tehát ekkor a nagyobb m_2 tömegnek kell felfelé indulnia. A feladat adataiból v_1 és v_2 nem számítható ki, csak v_1 sin α és $v_2 \sin\alpha$. A lehetséges v_1 és v_2 sebességvektorok végpontjai párhuzamos egyeneseken vannak (1. ábra).

Feladatunk számadataival $k = 2$, $t_1 = 4$ s, $t_2 = 8$ s, $h = 196$ méter, $v_2 \sin\alpha = 14{,}7$ m/s, $v_1 \sin\alpha = 29{,}4$ m/s.

2. *Vízszintes, l szélességű asztallapon átvetünk egy L hosszúságú, súlyos, tökéletesen hajlékony kötelet. Kezdetben a két lelógó kötélvég egyenlő hosszú. Az egyik kötélvéget kissé meghúzva a kötél mozgásnak indul. Vizsgáljuk meg a kötélben ható feszítőerőt a kötél egyes helyein, mozgás közben! (A súrlódástól tekintsünk el.) Legyen $L = 100$ cm, $l = 20$ cm.*

(Wiedemann László)

Megoldás. Kezdetben az asztal mindkét oldalán $(L - l)/2$ hosszúságú kötél lóg le (2. ábra).



2. ábra

A mozgásban levő kötél helyzetét végének s útjával jelöljük meg. A gyorsuló kötél mentén a fonálerő lineárisan változik, hiszen mindegyik keresztmetszetben működő erőnek a mögötte levő kötél tömegét kell gyorsítania. Az asztal élein a fonálerők K és F, a szabad végeken nulla. Célunk K és F meghatározása s függvényében.

Jelentse σ az 1 méter hosszú kötél tömegét és a a gyorsulást. F-nél a lelógó kötél tömege $[(L-l)/2+s]\sigma$, az F fonálerő a súly és gyorsító erő különbsége:

$$F=\sigma\left[\frac{L-l}{2}+s\right]g-\sigma\left[\frac{L-l}{2}+s\right]a.$$

A másik élnél lelógó kötél tömege $[(L-l)/2-s]\sigma$, a K fonálerő a súly és gyorsító erő összege:

$$K=\sigma\left[\frac{L-l}{2}-s\right]g+\sigma\left[\frac{L-l}{2}-s\right]a.$$

Az asztalon fekvő kötéldarabot gyorsító erő:

$$F-K=\sigma la.$$

Ez a három egyenlet egy egyenletrendszert alkot, amelynek megoldása:

$$a=\frac{2g}{L}\cdot s,$$

$$F=-\frac{2g\sigma}{L}\cdot s^2+\frac{g\sigma l}{L}\cdot s+\frac{g\sigma(L-l)}{2},$$

$$K=-\frac{2g\sigma}{L}\cdot s^2-\frac{g\sigma l}{L}\cdot s+\frac{g\sigma(L-l)}{2}.$$

Ezek a képletek csak addig érvényesek, ameddig K-nál is van még lelógó kötélvég. Ezután új számítást kell végezni. A lelógó kötélvég súlya gyorsítja az egész kötél tömegét:

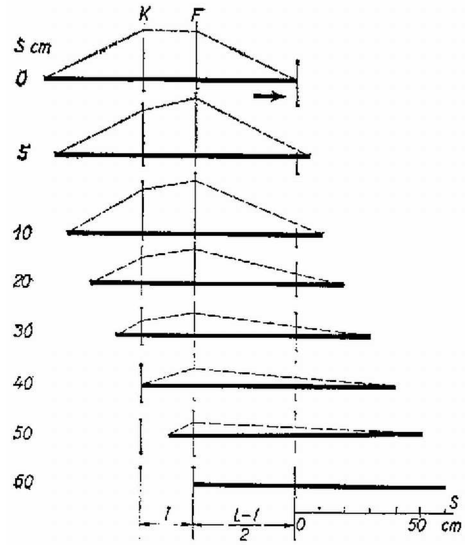
$$\sigma\left[\frac{L-l}{2}+s\right]g=\sigma La;$$

a K-ban működő fonálerő számára megmarad az előbbi egyenlet. Most az egyenletrendszer megoldása:

$$a=g\cdot\left[\frac{s}{L}+\frac{L-l}{2L}\right],$$

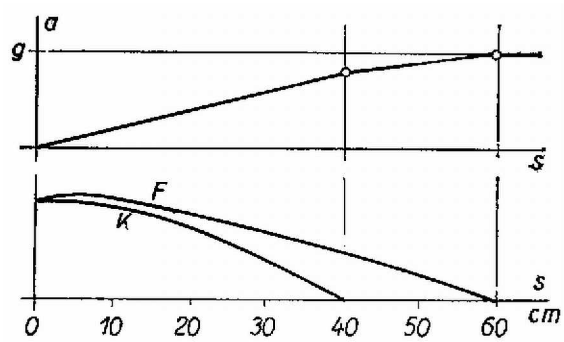
$$F=-\frac{g\sigma}{L}\cdot s^2+\frac{g\sigma l}{L}\cdot s+\frac{g\sigma(L^2-l^2)}{4L}.$$

A fonálerők alakulását a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Az egymás alatti rajzokon a kötél helyzete látszik csúszás közben, a lelógó részeket is vízszintesen rajzolva. A szaggatott vonal mutatja az illető helyen, a kötél azon helyzetében a fonálerő nagyságát. A gyorsulást és az asztal szélein jelentkező F és K kötélerőket a megtett út függvényében mutatja a 4. ábra.

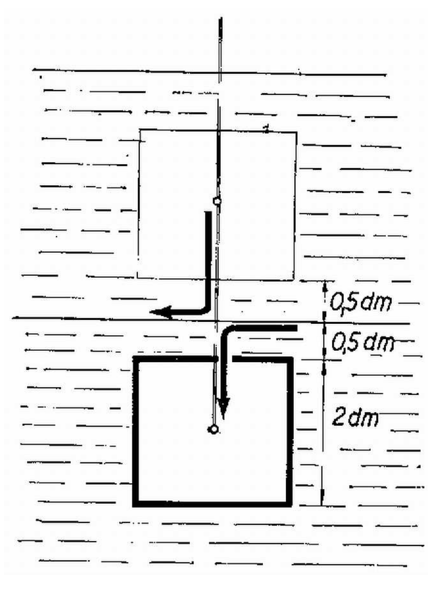


4. ábra

F erőnek maximuma van akkor, amikor a megtett út $l/4$. Számításainkban a gyorsulást és az erőket az út függvényében számítottuk, az időtől való függés megvizsgálása nehezebb feladat.

3. *Igen nagy alapterületű medencében vízre* 0,8 p/cm^3 *fajsúlyú olajat rétegeztünk nagy vastagságban. Egy* 2 dm *élhosszúságú,* 1,7 p/cm^3 *fajsúlyú magnéziumkocka úgy lóg egy fonálon, hogy felső lapja* 0,5 dm*-re van a határfelület alatt. A kockát felhúzzuk úgy, hogy alsó lapja* 0,5 dm*-re legyen a határfelület felett. Mennyi munkát végeztünk?*

Megoldás. A kocka térfogata $2^3 = 8$ dm^3, súlya $1{,}7 \cdot 8$ kp $= 13{,}6$ kp.



5. ábra

A kocka súlypontja 3 dm = 0,3 m távolsággal kerül feljebb (5. ábra), ezért a kocka felhúzásához $0{,}3 \cdot 13{,}6$ mkp = 4,08 mkp munkavégzés kellene. Azonban közben a kocka elhagyott helyére a határfelületről 8 kp súlyú víz folyik le, a súlypontig számítva 1,5 dm = 0,15 m szintkülönbségen át. Innen $0{,}15 \cdot 8$ mkp = 1,2 mkp munkát kapunk. A kocka új helyéről a határfelületre $0{,}8 \cdot 8$ kp = 6,4 kp súlyú olaj folyik le, 0,15 m szintkülönbségen át. Ebből $0{,}15 \cdot 6{,}4$ mkp = 0,96 mkp munkát kapunk. Összesítve a kocka felhúzásához (4,08 − 1,2 − 0,96 mkp) = 1,92 mkp munkavégzés szükséges.

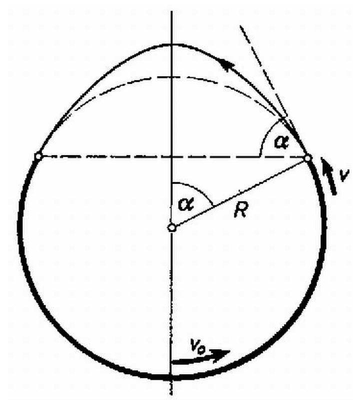
Ez a számítás és ez az eredmény csak akkor érvényes, ha a medence alapterülete igen nagy. Különben megváltozik felhúzás közben a két folyadék határfelületének magassága.

A II. forduló feladatai

1. $R = 8{,}16$ méter *sugarú, függőleges körpálya legmélyebb pontjáról* $v_0 = 20$ m/s *kezdősebességgel indítunk el egy kis tárgyat és ez a kör belsejében körülfut. A körpálya milyen nagy része hiányozhat, ha azt akarjuk, hogy a mutatvány mégis sikerüljön? (A súrlódást ne vegyük figyelembe.* $g = 9{,}8$ m/s^2*).*

(Bártfai Tamás)

Megoldás. A tárgy helyzetét határozza meg α szög (6. ábra).



6. ábra

Az alsó indítási sebesség legyen mint $\sqrt{gR}$ többszöröse megadva: $v_0^2 = k \cdot gR$. Az α szöggel meghatározott helyzetben meglevő v sebességet az energiamegmaradás törvényével számítjuk:

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \cos\alpha);$$

itt v_0^2 k-val kifejezett értékét használva:

(4) $$v^2 = [(k-2) - 2\cos\alpha] \cdot gR.$$

Ha a fal megszűnik, ferde hajítás kezdődik α szög alatt, ezzel a kezdősebességgel. A fal elhagyása akkor nem jelenti a mutatvány kudarcát, ha a hajítási parabola leszálló ága ismét simul a körhöz. Ebből következik, hogy a körpálya szimmetrikus darabjának kell hiányoznia és a parabola tetőpontjának a kör középpontja felett kell lennie. Ezt a feltételt úgy vehetjük legkönnyebben figyelembe, ha felírjuk, hogy az elmozdulás függőleges és vízszintes összetevői egyenlő idő alatt érkeznek el a kör középpontja felett levő maximumba. Az emelkedés ideje $t = v\sin\alpha/g$, a vízszintes elmozdulás ideje $t = R\sin\alpha/(v\cos\alpha)$. Ezeket egyenlővé téve:

$$\frac{v\sin\alpha}{g} = \frac{R\sin\alpha}{v\cos\alpha}.$$

Ebből a feladat feltételének megfelelő α szög cos-ára ez az eredmény következik:

$$\cos\alpha = \frac{gR}{v^2}$$

(4) felhasználásával:

$$\cos\alpha = \frac{gR}{[(k-2) - 2\cos\alpha]gR}.$$

Ebből a feladat megoldása:

$$\cos\alpha = \frac{k - 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k - 4}}{4}.$$

Feladatunk számadataival $k = 5$, $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 60°$.

A feladat taglalása a következő érdekességekre figyelmeztet. Az energiamegmaradás törvénye szerint arra a (függőlegestől mért) β szögre nézve, ameddig a tárgy a körön felmehet, ez következik:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 + \cos\beta).$$

(4) figyelembevételével $\cos\beta = \dfrac{k-2}{2}$.
De idáig csak akkor futhat fel a tárgy, ha a pálya olyan, hogy a körön tartja. Arra a (függőlegestől mért) γ szögre nézve, amelynél a tárgy leesik a kör belsejéről, ez érvényes:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\gamma.$$

Ugyancsak (4) figyelembevételével:

$$\cos\gamma = \frac{k-2}{3}.$$

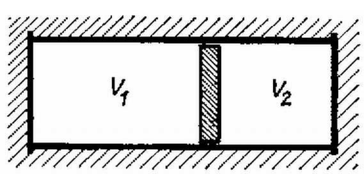
β kisebb, mint γ, tehát a tárgy a lehetséges legnagyobb magasság elérése előtt leesik. Táblázatunk néhány értéket tüntet fel ezekre a szögekre nézve.

k	γ	β	α
2	90°	90°	
3	70,5°	60°	
4	48°	0°	
$2+2\sqrt{2}$	18,5°		45° 45°
4,9	15°		18° 56°
5	0°		0° 60°
6			73°
7			77°

Az indítási sebességet 0-tól kezdve növelve $k = 4$-ig a tárgy beesik a kör belsejébe, mielőtt az energiamegmaradás törvénye folytán lehetséges magasságot elérte volna. $k = 4$-nél már elérné a tárgy a kör tetejét, de előbb leesik. $k = 2 + 2\sqrt{2}$-től kezdve lehet a tető egy darabját elhagyni. $k = 5$-ig α-ra két használható megoldásunk van; ebben az értéktartományban kétféleképp is elhagyható a körpálya teteje. Érdekes, ha nem vennénk le a tető egy darabját, akkor a mutatvány nem sikerülne, mert bizonyos γ szögnél a tárgy leesne a kör belsejébe. $k = 5$-től kezdődően a tárgy már képes volna leesés nélkül végigfutni a kör belsejében; a tető elhagyására ekkor már csak egy használható α szög kínálkozik.

2. *Hőszigetelő falú edényben* (7. ábra) $V_1 = 3$ liter *térfogatú*, $p_1 = 4$ atmoszféra *nyomású és* $T_1 = 1092°$ K *hőmérsékletű héliumgázt egy fal választ el* $V_2 = 2$ liter *térfogatú*, $p_2 = 2{,}5$ atmoszféra *nyomású és* $T_2 = 1365°$ K *hőmérsékletű héliumgáztól. A válaszfalat elengedjük, ezután a fal súrlódás nélkül mozoghat. Mekkora a nyomás az edényben, amikor a fal megáll, a) ha a mozgó fal jó hővezető, b) ha a mozgó fal tökéletesen hőszigetelő?*

(Bodó Zalán)



7. ábra

Megoldás. Az edény merev, hőszigetelő fala azt jelenti, hogy a henger belsejében a gázmolekulák mozgási energiájának összege változatlan marad. Ennek a mozgási energiának a mértéke a p nyomás és V térfogat szorzata, amely egyébként nRT-vel egyenlő, ahol n a gáz móljainak száma, T a gáz abszolút hőmérséklete és R a gázállandó: $pV = nRT$. Kezdeti állapotban a gázmolekulák összes mozgási energiája $p_1V_1 + p_2V_2$. A végső állapotban a nyomás a tartály mindegyik részében ugyanaz a p, a térfogatok V_{I}, és V_{II}. A végső állapotban a gázmolekulák összes mozgási energiája:

$$pV_{\mathrm{I}} + pV_{\mathrm{II}} = p(V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}}) = p(V_1 + V_2).$$

Ugyanis a gáz össztérfogata ugyanaz marad, $V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} = V_1 + V_2$. Mivel a gázmolekulák összes mozgási energiája nem változhat meg:

$$p_1V_1 + p_2V_2 = p(V_1 + V_2),$$

innen az a közös nyomás, amely a fal megállásakor létrejön:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}$$

Számadatainkkal $p = 3{,}4$ atmoszféra.

A végső egyensúly egyik feltétele a nyomások egyenlősége. Ehhez az *a)* esetben a hőmérséklet egyenlősége is járul. Mindegyik gáz-részre alkalmazzuk a gáztörvényt:

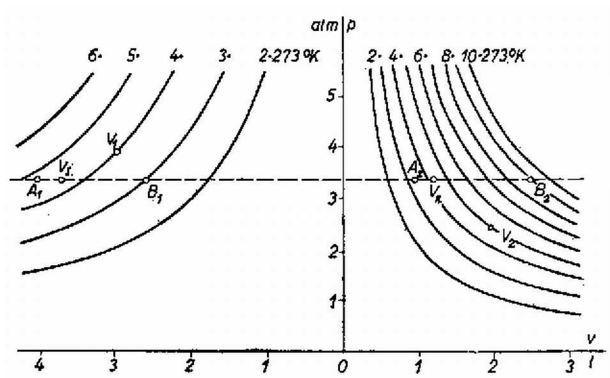
$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{pV_{\mathrm{I}}}{T}, \qquad \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{pV_{\mathrm{II}}}{T}.$$

Ehhez járul a térfogatösszeg állandósága:

$$V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} = V_1 + V_2.$$

Így megvan a három egyenletünk V_{I}, V_{II} és T számára. A mi esetünkben $T_1 = 4 \cdot 273^\circ$ K, $T_2 = 5 \cdot 273^\circ$ K. Egyenletrendszerünk megoldása $T = 4{,}25 \cdot 273^\circ \text{ K} = 1160{,}25^\circ$ K, $V_{\mathrm{I}} = 3{,}75$ liter, $V_{\mathrm{II}} = 1{,}25$ liter.

A *b)* esetben, amikor a mozgó fal hőszigetelő, hiányzik a hőmérsékletek és térfogatok számára egy feltétel. A *hőmérsékletek és térfogatok tekintetében a feladat határozatlan.*



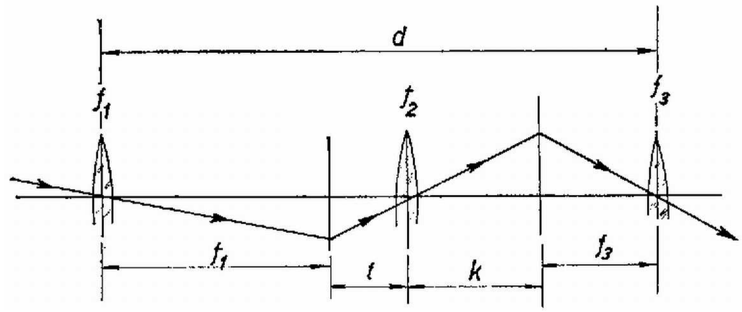
8. ábra

A 8. ábra jobb oldali része a tartály jobb oldali héliumgázának izotermáit tünteti fel. A bal oldalon, fordított irányban a bal oldali tartályrész gázának izotermái láthatók, figyelembe véve, hogy a bal oldali részben levő hélium normáltérfogata (tömege) a jobb oldalinak háromszorosa. A kezdeti állapotot V_1 és V_2 pontok tüntetik fel. A végső állapotot feltüntető pontoknak a 3,4 atmoszféra magasságban húzódó vízszintesen kell feküdniök, de úgy, hogy abszcisszáik összege az 5 liter össztérfogatnak megfelelő távolság legyen. Az *a)* esetben, amikor a fal jó hővezetése folytán a hőmérsékletnek ki kell egyenlítődnie, a végső állapotot jelző V_{I} és V_{II}, pontok egyenlő hőmérsékletű izotermákon feküsznek. A *b)* esetben a két rész hőmérséklete az egyensúlyállapotban különböző lehet. Ekkor a végállapotot jelző két pont a 3,4 atmoszféra magasságában húzott egyenesen, 5 liternek megfelelő távolságban akárhol helyezkedhet el, különböző hőmérsékletű izotermákon is. Például lehetséges végállapot A_1 és A_2 (4 liter, $4{,}533 \cdot 273^\circ$ K és 1 liter, $3{,}4 \cdot 273^\circ$ K), azután B_1 és B_2 pont (2,5 liter, $2{,}833 \cdot 273^\circ$ K és 2,5 liter, $8{,}5 \cdot 273^\circ$ K) stb. Hőszigetelő fal esetében vezetéssel nem tudják az egyik gázrész molekulái kinetikus energiájuk egy részét a másik gázrésznek átadni. Ellenben az egyes gázrészek molekuláinak mozgási energiája mégis megváltozik annak következtében, hogy a mozgó fal megüti és felgyorsítja azokat. Mindkét esetben az elinduló fal lengéseket végez, amelyeket a gáz belső súrlódása lefékez, megállít. (Az ideális gáznak is van belső súrlódása, mert ez a molekulák véges méretének következménye. A véges méret teszi lehetővé a molekulák kölcsönös ütközését és ezzel a sebességeloszlás egyensúlyának létrejöttét.)

3. *Három gyűjtőlencsénk van. Fókusztávolságaik* 90 cm, 10 cm *és* 8 cm. *Hogyan kell ezekből a lehető legnagyobb nagyítású távcsövet összeállítani, ha a távcső hossza legfeljebb* 150 cm *lehet? (A lencsék vékonyak és minden lencsehibától eltekintünk.)*

(Bodó Zalán)

Megoldás. Úgynevezett *földi* messzelátót készítünk (9. ábra).



9. ábra

f_1 tárgylencse-fókusztávolságban keletkezik az első kép. A második kép a szemlencse előtt, ettől f_3 fókusztávolságban keletkezik. Tehát a d távcsőhosszból a fordítólencse $t+k$-jára $d-f_1-f_3$ marad:

$$t+k=d-f_1-f_3$$

A lencsetörvény a fordítólencsére nézve:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f_2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$t=\frac{d-f_1-f_3-\sqrt{(d-f_1-f_3)(d-f_1-f_3-4f_2)}}{2},$$
$$k=\frac{d-f_1-f_3+\sqrt{(d-f_1-f_3)(d-f_1-f_3-4f_2)}}{2}.$$

A tárgylencse szögnagyítása f_1/t, a szemlencse szögnagyítása k/f_3, a teljes szögnagyítás:

$$N=\frac{f_1}{t}\cdot\frac{k}{f_3}=\frac{f_1}{f_3}\cdot\frac{k}{t}.$$

k és t előbbi értékeit felhasználva:

$$N=\frac{f_1}{f_3}\cdot\frac{1+\sqrt{1-4f_2/(d-f_1-f_3)}}{1-\sqrt{1-4f_2/(d-f_1-f_3)}}.$$

Különböző összeállításokat próbálunk ki. Nyilván az $f_1=90$ cm gyújtótávolságú lencse lesz a tárgylencse és felhasználjuk a teljes $d=150$ cm hosszúságot. Az alábbi eredményeket nyerjük:

f_1	f_2	f_3	t	k	N
90 cm,	8 cm,	10 cm,	10 cm,	40 cm,	36
90 cm,	10 cm,	8 cm,	13,5 cm,	38,5 cm	32,06.

Látható, hogy a legjobb nagyítást akkor kapjuk, ha a fordító lencse a 8 cm-es, a szemlencse a 10 cm-es gyújtótávolságú. Megvizsgálhatjuk, hogy két lencsét lencserendszerré egyesítve az ezzel összeállított *csillagászati* távcső nagyítása bármely kombinációban kisebb, mint 36.

Az 1970. évi fizika tanulmányi verseny eredménye

I. díj *Göndöcs Ferenc* (Győr, Révai M. g. III. o. t. Tanára: Takács István).
II. díj *Kereszturi András* (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t. Tanára: Kellner Dénes).
III. díj *Borzsák Péter* (Budapest, I. István g. IV. o. t. Tanára: Cseh Géza).

A további helyezettek: 4. *Bajmóczy Ervin* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.), 5. *Mosó Tamás* (Budapest, Eötvös J. g. III. o. t.), 6. *Lempert László* (Budapest, Radnóti M. g. IV. o. t.), 7. *Horváthy Péter* (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.), 8. *Dávid Gyula* (Budapest, József A. g. III o. t.), 9. *Láz József* (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.), 10. *Faragó Tamás* (Debrecen, KLTE gyakorló g. III. o. t.).