Bármely számtani sorozat első $2n$ tagja összegének és első n tagja összegének hányadosa – a szokásos jelölésekkel – így alakítható:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{2n\{2a_1 + (2n-1)\,d\}}{n\{2a_1 + (n-1)\,d\}} = \frac{4dn + 2\,(2a_1 - d)}{dn + (2a_1 - d)} = 4 - \frac{2\,(2a_1 - d)}{dn + (2a_1 - d)}. \tag{1}$$

Vizsgáljuk meg, mikor lesz például az $n = 1$ és az $n = 2$ értékeknek megfelelő hányados egyenlő:

$$4 - \frac{2\,(2a_1 - d)}{d + (2a_1 - d)} = 4 - \frac{2\,(2a_1 - d)}{2d + (2a_1 - d)}.$$

Ebből a tört eltávolításával és rendezve a

$$d\,(2a_1 - d) = 0$$

feltételt kapjuk, ami kétféleképpen teljesülhet:

I. $d = 0$, ekkor a_1 nem lehet 0, hiszen $a_1 = 0$ mellett $S_n = S_{2n} = 0$ lenne tehát nem beszélhetnénk a hányadosról;
II. $2a_1 = d$, és I-hez hasonlóan itt is $a_1 \neq 0$.

Az I. mód esetében a sorozat minden tagja ugyanaz, ezért feladatunk második követelményének megfelelően 1971-nek kell lennie. Ekkor az összeg (képlet nélkül is) $S_{2n} = 2n \cdot 1971$, $S_n = n \cdot 1971$, hányadosuk 2, az (1) idevonatkozó értékének megfelelően. Ilyen sorozat csak 1 van.

A II. mód esetében a következő sorozatról van szó: a_1, $3a_1$, $5a_1$, $\ldots$, vagyis a páratlan természetes számok sorozatának a_1-szereséről, ahol – az előírás szerint – a_1 is csak páratlan természetes szám lehet. Ennek akkor és csak akkor tagja a kívánt 1971-es szám, ha a_1 az 1971-nek valamely pozitív egész osztója, és ez a feltétel elegendő is, mert 1971-nek minden osztója páratlan.

Mármost különböző alapú törzsszámhatványok szorzataként $1971 = 3^3 \cdot 73$, így különböző pozitív osztói:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 3, & 3^2 = 9, & 3^3 = 27, \\ 73, & 3 \cdot 73 = 219, & 9 \cdot 73 = 657; & 27 \cdot 73 = 1971, \end{array}$$

számuk 8. Ezeket véve rendre egy-egy sorozat kezdő tagjaként, differenciájának pedig a kezdő tag 2-szeresét, csupa egymástól és az I-ben találttól különböző sorozatot kapunk, tehát a követelményeknek megfelelő sorozatok száma 9.

Polyák Gábor (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az iskolai tananyaghoz igazodva kizárólag *elsőrendű* számtani sorozatokat vettünk figyelembe.

2. A II. mód esetére megadhattuk volna a választ az 1971 osztóinak felírása nélkül is, számukat megadja az a szorzat, amelynek tényezői a $3^3 \cdot 27$ felbontásban előfordult kitevőknél 1-gyel – 1-gyel nagyobb számok[1]: $(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$.

[1]Egy szám pozitív osztóinak számára vonatkozó tételt lásd: *Faragó László:* A számelmélet elemei, Középiskolai Szakköri Füzetek, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967. 46. oldal