Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 18-án rendezte ez évi fizikai versenyét. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. *$M = 1{,}5 \cdot 10^{25}$ gramm tömegű, $R = 3600$ km rádiuszú égitest felszíne felett $h = 400$ km magasan egy űrhajó kering körpályán. Fékező rakétáját rövid ideig menetiránnyal szemben működtetve olyan ellipszispályára tért, amelyen az égitest átellenes pontján elérte annak felszínét. A fékezéskor mozgási energiájának hányadrészét kellett elvesztenie?*

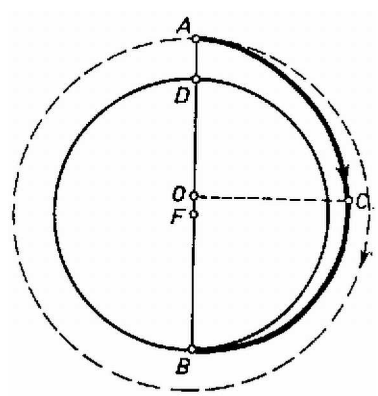
Megoldás. Jelöljük az m tömegű égitest sebességét a körpályán v_0-val. A tömegvonzási erő egyenlő a centripetális erővel:

$$\frac{mv_0^2}{R+h} = \frac{fMm}{(R+h)^2};$$

az űrhajó tömege kiesik és a körsebesség négyzete:

$$v_0^2 = \frac{fM}{R+h} = \frac{fM}{R(1+h/R)}. \tag{1}$$

Ha az űrhajó ellipszispályára tér (1. ábra), akkor az ellipszis fél nagytengelye $a = R + h/2$, excentricitása $c = h/2$ és fél kistengelye $b = R\sqrt{1+h/R}$.



1. ábra

Kepler III. törvénye szerint a keringési idők csak a fél nagytengelyektől függenek, a kistengelytől függetlenek. A körpályán T_0, az ellipszispályán T a keringési idő. Tehát

$$T^2 : T_0^2 = (R+h/2)^3 : (R+h)^3.$$

A keringési idő az ellipszispályán:

$$T = T_0\sqrt{\left(\frac{R+h/2}{R+h}\right)^3}.$$

A körpályán a keringési idő (1) felhasználásával:

$$T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0} = \frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{\sqrt{fM}}.$$

Ezt felhasználva a keringési idő az ellipszispályán:

$$T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{fM}} \cdot \frac{(R+h/2)^{3/2}}{(R+h)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{fM}} \cdot (R+h/2)^{3/2}.$$

Az ellipszis területe:

$$\pi ab = \pi(R+h/2) \cdot R \cdot \sqrt{1+h/R}.$$

Ezeket felhasználva kiszámítjuk, mennyi a területi sebesség az egész ellipszispályából számítva:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\sqrt{fM} \cdot R\sqrt{1+h/R}}{2\sqrt{R+h/2}}. \tag{2}$$

Kepler II. törvénye szerint a területi sebesség az ellipszis minden pontján ugyanannyi. A fékezés A pontjában számítva a vezérsugár $R+h$ és a sebesség valamilyen v. Ezekkel is kiszámíthatjuk a területi sebességet:

$$\frac{v(R+h)}{2} = \frac{vR(1+h/R)}{2}.$$

Ezt egyenlővé tesszük a (2) alatti területi sebességgel:

$$\frac{vR(1+h/R)}{2}=\frac{\sqrt{fM}\cdot R\cdot\sqrt{1+h/R}}{2\sqrt{R+h/2}}.$$

Innen a fékezés pillanatában érvényes sebesség:

$$v=\frac{\sqrt{fM}}{\sqrt{1+h/R}\cdot\sqrt{R+h/2}},$$

és ennek a sebességnek a négyzete:

$$v^2=\frac{fM}{(1+h/R)\cdot(R+h/2)}. \tag{3}$$

(1) és (3) összehasonlításával megkapjuk azt, hogy az A pontban történő fékezés után az eredeti mozgási energiának mekkora hányada maradt meg:

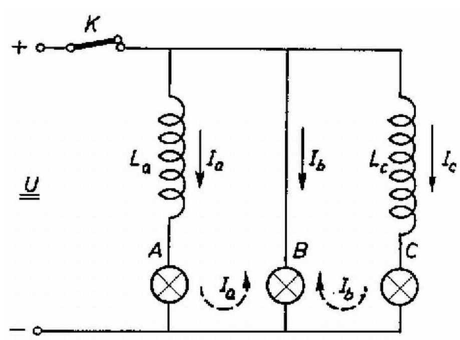
$$\frac{v^2}{v_0^2}=\frac{R}{R+h/2}=\frac{2R}{2R+h}.$$

Vagyis a mozgási energiák a nagytengelyek arányában állnak. A fékezéskor elvesztett mozgási energiahányad:

$$1-\frac{v^2}{v_0^2}=\frac{h}{2R+h}.$$

Az égitest tömege kiesik. A mi számadatainkkal az elvesztett energiahányad 1/19.

2. *A 2. ábra szerinti kapcsolásban L_a és L_c nagy önindukciójú tekercsek, A, B és C különböző ellenállású izzólámpák. U egyenfeszültség hosszabb ideje be van kapcsolva, a lámpák égnek. Vizsgáljuk meg a három izzólámpa viselkedését K kapcsoló kinyitása után!*

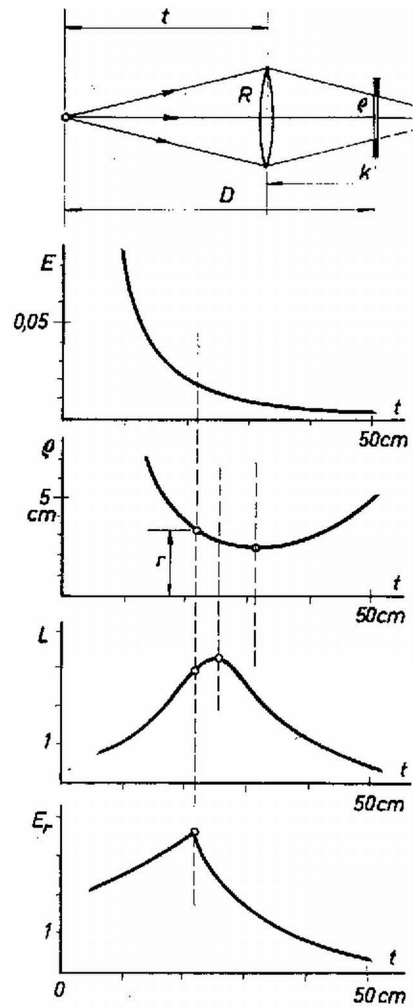


2. ábra

Megoldás. A kapcsoló működtetése előtt az egyes ágakban az izzólámpák ohmos ellenállásainak megfelelő I_a, I_b és I_c áramok folynak. A kapcsoló kinyitása után I_b áram azonnal megszűnik, hiszen ebben az ágban csak ohmos ellenállás volt. Az önindukciós tekercsek mágneses fluxusa az indukciótörvény szerint az első pillanatban nem változhat, ezért I_a és I_c áramok tovább folynak, mégpedig B izzólámpán át, alulról felfelé. Aszerint, hogy I_a+I_c az előbb még folyó I_b áramnál nagyobb, kisebb vagy egyenlő, B izzólámpa hirtelen felvillan, hirtelen elsötétül vagy változatlan fényű. Természetesen egy idő múlva az áramok megszűnnek.

3. $2R=8$ cm *átmérőjű,* $f=20$ cm *gyújtótávolságú, gyűjtőlencse tengelyén egy pontszerű fényforrást és tőle* $D=50$ *cm távolságban* $2r=7$ cm *átmérőjű kör alakú kartonlapot helyezünk el (a tengelyre merőlegesen). a) A lencse mely helyzetében lesz a kartonlap közepén a legerősebb a megvilágítás erőssége? b) Mikor lesz a legnagyobb a kartonlapra eső teljes fényenergia?*

Megoldás. Először az *a)* kérdéssel foglalkozunk. Ez szükséges lehet abban az esetben, ha egy apró rést minél erősebben kell megvilágítanunk. A 3. ábra első rajza mutatja az elrendezést. A fényforrás és az ernyő D távolsága mindenképp állandó marad. t tárgy-lencse távolságot változtatjuk és t függvényeként vizsgálunk mindent. A fényforrás képe a lencsétől k távolságban keletkezne, ehelyett azonban az ernyőn kapunk ϱ rádiuszú megvilágított kört.



3. ábra

A lencse által hasznosított fényenergia azzal a kúpszöggel arányos, amelynek középpontja a fényforrásban van és a lencse határolja. Ezért (igen jó közelítéssel) a lencsét érő fényenergia arányos R/t négyzetével:

$$E = K\left(\frac{R}{t}\right)^2. \tag{4}$$

A lencsét érő E fényenergia t-től való függését mutatja a 3. ábra második rajza.

Hasonló háromszögekkel kiszámítjuk az ernyőn keletkező megvilágított kör ϱ rádiuszát:

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{k+t-D}{k}.$$

Felhasználva itt a lencsetörvényből adódó $k = tf/(t-f)$ képtávolságot:

$$\varrho = R\cdot\frac{t^2 - Dt + Df}{tf}. \tag{5}$$

Ennek a függvénynek a menetét a 3. ábra harmadik rajza mutatja. ϱ-nak minimuma van $t = \sqrt{Df} = 31{,}6$ cm-nél, amikor $\varrho = 2{,}7$ cm.

Ha az ernyőn keletkező megvilágítás erősségét keressük, akkor a (4) által rendelkezésre álló fényenergiát el kell osztanunk a ϱ rádiuszú kör területével:

$$L = \frac{E}{\pi\varrho^2}.$$

Felhasználva ϱ-ra az (5) alatti eredményt, az ernyőn keletkező megvilágítási erősség:

$$L = \frac{Kf^2}{\pi}\cdot\frac{1}{(t^2 - Dt + Df)^2}. \tag{6}$$

Azonnal látható, hogy L-nek maximuma van ott, ahol a nevező a legkisebb. Ez $t = D/2$-nél következik be. Tehát az *a)* kérdésre a felelet: a lencsét a fényforrás és ernyő távolságának közepére kell állítani, függetlenül a lencse fókusztávolságától. A megvilágítási erősségnek a lencsetávolságtól való függését a 3. ábra negyedik rajza mutatja. A megvilágítási erősség ezen maximumát beállítva az ernyőn megvilágított kör rádiusza $\varrho = 3$ cm, tehát a megvilágított kör nem tölti be az egész ernyőt. Egyébként az *a)* kérdésnél lényegtelen az ernyő nagysága.

Most vizsgáljuk meg a *b)* kérdést. Erre akkor lehet szükség, ha például fényt felfogó eszközünk egy fotocella és a legerősebb áramot akarjuk kapni.

Ha az (5) képletben ϱ helyébe r-et teszünk, akkor megtudjuk, mekkora t tárgytávolságnál tölti be a megvilágított kör éppen a felfogó ernyőt. A mi esetünkben $r = 3{,}5$ cm és ennek alapján $t = 22$ cm mellett fér el a megvilágított kör éppen az ernyőnkön.

Mozgassuk el a lencsét balról jobbfelé, de induljunk el igen kis t-től, mondjuk $t = 10$ cm-től. Ekkor, egészen $t = 22$ cm-ig a megvilágított körnek csak egy része esik a felfogó ernyőre, ezért az ernyőre eső összes E_r fényenergiát az L-re kapott (6) alatti eredményünk és πr^2 szorzata adja meg. Mivel a terület állandó, ezért egészen $t = 22$ cm-ig az összes fényenergia úgy növekszik, mint a 3. ábra negyedik rajzában L (lásd a 3. ábra ötödik rajzát). Ha a lencsével túlmegyünk $t = 22$ cm-en, akkor ϱ kisebbedik, az ernyő nincs egészen megtöltve fénnyel, tehát az ernyőre eső összes fényenergia úgy változik, minta lencsébe kerülő E_t energia. Ez azonban t távolság négyzetével fordított arányban csökken. Tehát ezekben a helyzetekben az összes fényenergia csökken. Így *b)* kérdésre a feleletünk: úgy kell a lencsét beállítani, hogy az ernyőn keletkező megvilágított kör éppen betöltse az ernyőt. A mi esetünkben ez $t = 22$ cm-nél következik be.

A verseny eredménye. I. díjat nyert *Horváthy Péter,* a budapesti Fazekas gimnázium IV. osztályos tanulója(tanára Mihály István). II. díjat nyert *Lempert László,* a budapesti Radnóti gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Kugler Sándorné). III. díjat nyert *Nagy András,* a budapesti Fazekas gimnázium III. osztályos tanulója (tanára Hutai Ferenc) és *Láz József,* a budapesti Eötvös gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Kellner Dénes). Dicséretet kapott *Bajmóczy Ervin,* a budapesti Fazekas gimnázium III. osztályos tanulója (tanára Hutai Ferenc), *Gulyás András* honvéd (a budapesti Apáczai Csere g.-ban Holics László volt tanítványa), *Kálmán Péter,* az ELTE fizikus hallgatója (a budapesti Apáczai Csere g-ban Holics László volt tanítványa) és *Spitzer József honvéd* (a budapesti Vörösmarty g.-ban Óhegyi Ernő volt tanítványa).