I. megoldás. Feladatunk állítását n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be. Mivel d és s értéke nem függ az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok sorrendjétől, feltehetjük, hogy $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, ekkor $d = a_n - a_1$ (≥ 0).

Ha $n = 1$, sem d, sem s nincs értelmezve, ezért a bizonyítást az $n = 2$ esettel kezdjük. Ekkor $s = a_2 - a_1 = d$, tehát (1) mindkét oldalán az egyenlőség jele érvényes. Ha $n = 3$, akkor

$$s = (a_3 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = 2(a_3 - a_1) = 2d,$$

tehát (1) bal oldalán az egyenlőség, jobb oldalán az egyenlőtlenség jele érvényes (illetve $d = 0$ mellett ott is az egyenlőség jele érvényes).

Legyen $N \ge 4$, és tegyük fel, hogy (1)-et már bizonyítottuk minden $n < N$ mellett. Bontsuk $n = N$ mellett az s-et definiáló összeget két tagra. Az elsőben azoknak a pároknak a különbsége szerepeljen, amelyeknek az egyik tagja a_1 vagy a_N. Jelöljük ezt a tagot s_1-gyel:

$$s_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_1) + \ldots + (a_N - a_1) +$$
$$+ (a_N - a_2) + \ldots + (a_N - a_{N-1}) = (N-1)(a_N - a_1) = (N-1)d.$$

A másik tagot jelöljük s_2-vel, ez az $a_2, a_3, \ldots, a_{N-1}$ számokból alkotható párok különbsége abszolút értékének az összege. Jelöljük $(a_{N-1} - a_2)$-t d_2-vel. Feltevésünk szerint az $a_2, a_3, \ldots, a_{N-1}$ számokra érvényes az (1)-nek megfelelő

$$(N-3)\, d_2 \le s_2 \le \frac{(N-2)^2}{4}\, d_2$$

egyenlőtlenség. Mivel $0 \le d_2 \le d$, ebből következik, hogy

$$0 \le s_2 \le \frac{(N-2)^2}{4}\, d.$$

Adjuk ennek a kettős egyenlőtlenségnek minden tagjához az $s_1 = (N-1)d$ számot, így $s = s_1 + s_2$ alapján kapjuk, hogy

$$(N-1)\, d \le s \le (N-1)\, d + \frac{(N-2)^2}{4}\, d = \frac{N^2}{4}\, d,$$

amí a kívánt (1) egyenlőtlenség $n = N$ mellett. Az állítást ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$ példa mutatja, hogy (1) bal oldalán tetszőleges n mellett érvényes lehet az egyenlőség jele. Láttuk, hogy $n = 3$ mellett (1) jobb oldalán mindig az egyenlőtlenség jele érvényes, és megoldásunkból kiolvasható, hogy így van ez minden páratlan n mellett. Ha $n = 2k$, az $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_{2k} = 1$ példa mutatja, hogy (1) jobb oldalán is érvényes lehet az egyenlőség jele.

II. megoldás. Ismét feltesszük, hogy $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, és $n \ge 2$. Legyen

$$d_k = a_{k+1} - a_k,$$

ekkor $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}$, és ha $i < j$,

$$a_j - a_i = d_i + d_{i+1} + \ldots + d_{j-1}. \qquad (2)$$

Az s-et definiáló összegben a (2) bal oldalán álló különbségek szerepelnek az összes lehetséges $1 \le i < j \le n$ indexpár mellett. Vizsgáljuk meg, hányszor szerepelne ebben az összegben a d_k szám, ha az $a_j - a_i$ különbségek helyére a (2) jobb oldalán álló összeget írnánk. d_k akkor fordul elő (2) jobb oldalán, ha $i \le k < j$. Rögzített k-hoz $(1 \le k \le n-1)$ k-féleképpen választhatjuk meg az i indexet úgy, hogy $i \le k$ teljesüljön, és $(n-k)$-féleképpen a $j > k$ indexet. Mivel bármely i-hez bármely j-t választhatjuk ($i \le k$ és $j > k$ miatt $i < j$ is automatikusan teljesül), az i, j párt $k(n-k)$-féleképpen választhatjuk meg – ennyiszer lép fel d_k az s-et definiáló összegben. Emiatt

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k\,(n-k)\, d_k.$$

Ennek az összegnek minden tagja nem-negatív, így nem növeljük, ha $k(n-k)$ helyett mindenütt e szorzatok legkisebbikét, $1 \cdot (n-1)$-et írjuk:

$$s \ge \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot (n-1)\, d_k = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} d_k = (n-1)\, d,$$

ami a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség bal oldala.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján a $k(n-k)$ szorzatok nem lehetnek nagyobbak $n^2/4$-nél:

$$k\,(n-k) \le \left(\frac{k+n-k}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

tehát nem csökkentjük az összeg értékét, ha $k(n-k)$ helyére mindenütt $n^2/4$-et írunk:

$$s \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2}{4}\,d_k = \frac{n^2}{4}\sum_{k=1}^{n-1} d_k = \frac{n^2}{4}\,d,$$

ami a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség jobb oldala. Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.