A számhármasokat úgy keressük, hogy előre megmondjuk, mik legyenek a tagjaiknak a négyzetszám osztóik. Mivel sok számhármast szeretnénk biztosítani, célszerűnek látszik erre a célra kis négyzetszámokat választani. A legkisebb osztóhármas a 2^2, 3^2, 4^2 volna, ehhez azonban nem találhatunk megfelelő számhármast, hiszen ha egy szám osztható 2^2-nel, akkor sem a szomszédja, sem a második szomszédja nem lehet 4-gyel osztható. (Hasonlóan láthatjuk be általában, hogy csak olyan osztóhármast érdemes vizsgálni, melyben a tagok páronként relatív prímek.) Ezért először a 2^2, 3^2, 5^2 osztóhármashoz tartozó számhármasokat keresünk.

Egy szám akkor osztható $5^2 = 25$-tel, ha utolsó két jegye 00, 25, 50 vagy 75. Az ilyen számok első vagy másod-szomszédjai közül azok oszthatók $2^2 = 4$-gyel, amelyek utolsó két jegye 24, 48, 52 vagy 76. Ezeknek megfelelően olyan számokat keresünk, amelyek utolsó két jegye 23, 26, 49, 51, 74 vagy 77, és oszthatóak 9-cel. Egy szám akkor osztható 9-cel, ha jegyeinek összege 9-cel osztható, így – a számokat egyelőre csak a háromjegyűek között keresve – a 423, 126, 549, 351, 774, 477 számokat kapjuk, amelyeknek a

423,	424,	425;	350,	351,	352;
124,	125,	126;	774,	775,	776;
548,	549,	550;	475,	476,	477;

számhármasok felelnek meg. Ezek mindegyike osztható négyzetszámmal, nevezetesen a 2^2, 3^2, 5^2 számok valamelyikével.

További megfelelő számhármasokat kapunk, ha a most kapott hármasok tagjaihoz hozzáadjuk $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$ tetszőleges többszörösét, hiszen ha egy a azám osztható 2^2-nel, vagy 3^2-nel, vagy 5^2-nel, akkor $900k + a$ is osztható 2^2-nel, ill. 3^2-nel, ill. 5^2-nel. Akárhogy veszünk tehát 900 egymás utáni természetes számot, azok között mindig van 6 olyan számhármas, melynek tagjait a most előállított számhármasból állíthatjuk elő a 900 alkalmas többszörösének a hozzáadásával, ha pedig 2000 egymás utáni természetes számot veszünk, azok között legalább 12 ilyen számhármast találunk.

Újabb osztóhármas kijelölésével további számhármasokat adhatunk meg. Mivel a tagoknak páronként relatív prímeknek kell lenniük, a következő legkisebb osztóhármas a 2^2, 3^2, 7^2. Egy természetes szám akkor osztható 7^2-nel, ha $49k$ alakú, ahol k természetes szám. Olyan k szorzót keresünk, melyre a $N = 49k$ szám első és másod-szomszédjai közül az egyik 4-gyel, a másik 9-cel osztható, pontosabban:

a) $N - 2$ osztható 4-gyel és $N - 1$ osztható 9-cel,
b) $N - 1$ osztható 4-gyel és $N - 2$ osztható 9-cel,
c) $N - 1$ osztható 4-gyel és $N + 1$ osztható 9-cel,
d) $N + 1$ osztható 4-gyel és $N - 1$ osztható 9-cel,
e) $N + 1$ osztható 4-gyel és $N + 2$ osztható 9-cel,
f) $N + 2$ osztható 4-gyel és $N + 1$ osztható 9-cel.

Mivel N egyik esetben sem osztható 4-gyel, csak olyan k értékeket vizsgálunk, melyek nem oszthatók 4-gyel, azaz $4n + i$ alakúak, ahol n természetes szám és $i = 1$, 2 vagy 3. Ekkor

$$N = 49k = 49(4n + i) = 4 \cdot 49n + 49i,$$

tehát $i = 1$ mellett N a 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, és $N - 1$ osztható 4-gyel, (*b)* és *c)* eset); $i = 2$ mellett N a 4-gyel osztva 2-t ad maradékul, és $N - 2$ is, $N + 2$ is osztható 4-gyel (*a)* és *f)* eset); végül $i = 3$ mellett $N + 1$ osztható 4-gyel (*d)* és *e)* eset).

Ha $i = 1$, akkor $(N - 2)$-nek vagy $N + 1$-nek kell 9-cel oszthatónak lennie, azaz N-et 9-cel osztva 2-t, vagy 8-at kell maradékul kapnunk. Mivel $i = 1$ mellett

$$N = 196n + 49 = (189n + 45) + (7n + 4),$$

ahol az első tag osztható 9-cel, elegendő a második tagban a kívánt maradékot biztosítanunk, amit el is érünk $n = 1$ vagy $n = 7$ mellett, N megfelelő értéke 245 és 1421.

Ha $i = 2$, akkor $(N - 1)$-nek, vagy $(N + 1)$-nek kell 9-cel oszthatónak lennie:

$$N = 196n + 98 = (189n + 90) + (7n + 8),$$

tehát $n = 0$ vagy $n = 8$, és N értékei: 98, 1666.

Ha $i = 3$, akkor $(N - 1)$-nek vagy $(N + 2)$-nek kell 9-cel oszthatónak lennie:

$$N = 196n + 147 = (189n + 144) + (7n + 3),$$

tehát $n = 1$, vagy $n = 7$, és N értékei: 343, 1519.
A következő számhármasokat kaptuk:

a)	1664,	1665,	1666;	*d)*	342,	343,	344;
b)	243,	244,	245;	*e)*	1519,	1520,	1521;
c)	1420,	1421,	1422;	*f)*	98,	99,	100.

A fentiekhez hasonlóan ezekből újabb megfelelő számhármasokat kapunk, ha a tagjaikhoz $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 1764$ tetszőleges egész számú többszörösét hozzáadjuk. Az így kapott számhármasok közt minden egymás utáni 1764 szám között van 6, tehát 2000 egymás utáni természetes szám között is van 6.

Az eddig talált két csoportból összesen $12 + 6 = 18$ számhármast kapunk, e két csoportnak azonban lehetnek közös elemei. Előfordulhat ugyanis, hogy az utóbb megadott számhármasok tagjai a 2^2, 3^2, 5^2 osztóhármashoz is hozzátartoznak, de csak akkor, ha bennük a 7^2-nel osztható tag 5^2-nel is osztható. Ezeket kell még megkeresnünk.

Az *a)* esetben az $1666 + 1764m$ számok között kell 25-tel oszthatót találnunk. Az összeg végződése csak páros lehet, de láttuk, hogy a 00 végződés nem léphet fel, így az összeg utolsó két jegye csak 50 lehet. Ez azt jelenti, hogy $1764m$ utolsó két jegye 84, ami $m = 6$ mellett következik be először.

Hasonló módon kapjuk a többi b), c), d), e), f) esetben az utolsó két jegyből való visszaszámolással, hogy 1764 legkisebb alkalmas szorzója rendre 20, 11, 13, 4, 18. Megmutatjuk, hogy a további szorzótényezők ezekből a 25 alkalmas többszörösének a hozzáadásával kaphatók meg. Ha ugyanis valamilyen a természetes számra $(a + 1764m_1)$ és $(a + 1764m_2)$ is osztható 25-tel, akkor e számok különbsége, $1764(m_1 - m_2)$ is osztható 25-tel, ami csak akkor lehetséges, ha $(m_1 - m_2)$ is osztható 25-tel. A kapott 4, 6, 11, 13, 18 és 20 m-értékek között fellépő legkisebb különbség a $6 - 4 = 13 - 11 = 20 - 18 = 2$ különbség, ami a megfelelő számhármasokra $2 \cdot 1764 = 3528$ különbséget ad.

Ezek szerint 2000 szomszédos természetes szám között az általunk megkonstruált két csoportnak legfeljebb egy közös számhármasa lehet, így a két csoportban együtt mindig van $12 + 6 - 1 = 17$ különböző számhármas.