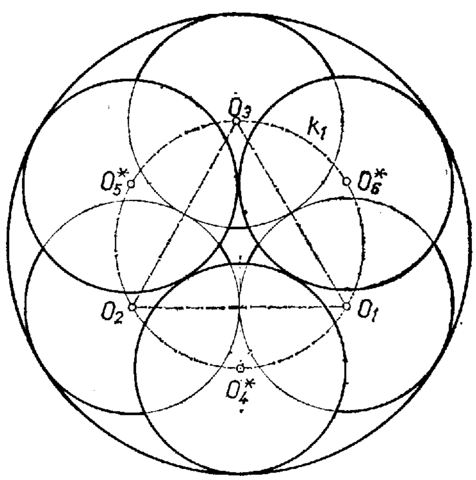
A henger tengelyét függőlegesre állítjuk úgy, hogy a nyílás fönt legyen. A $2R = 82$ egységnyi átmérő nyilvánvalóan az edény belső átmérőjének tekintendő. Az edény fenekére éppen befér 3 gömb úgy, hogy O_1, O_2, O_3 középpontjaik egy S_1 vízszintes síkban legyenek. Ugyanis úgy állítva őket, hogy páronként érintsék egymást, az $O_1O_2O_3$ háromszög mindegyik oldala egyenlő a gömbök $2r$ átmérőjével, a háromszög köré írt k_1 kör r_1 sugara $2/3$ része a háromszög $r\sqrt{3}$ magasságának. Annak az ezzel koncentrikus, legkisebb körnek a R^* sugara pedig, amely magába zárja a 3 gömb S_1-be eső, egymást páronként érintő főkörét, $r_1 + r$, azaz

$$R^* = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) = \frac{r}{\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3}) = r \cdot 2{,}1547,$$

és $r = 19$ esetén $R^* = 40{,}94$ egység, kisebb a tartály $R = 41$ sugaránál. A csekély (0,2 %-nál kisebb) eltérésre tekintettel a továbbiakban a henger átmérőjét csak $2R^*$-nak tekintjük.

Nyilvánvalóan az eddigi rétegnek föléje illeszthető egy újabb ilyen, 3 gömbből álló réteg úgy, hogy az 1–1 felső és alsó középpontot összekötő O_4O_1, O_5O_2, O_6O_3 egyenesek függőlegesek, az $O_4O_5O_6$ sík $2r$ magasságban van S_1 fölött, hiszen így mindegyik új gömb egyet érint az alsók közül, támaszkodik rá. Ha viszont az új réteget addig forgatjuk, míg az O_4 közepű gömb az O_2 közepűt is érinti, akkor az új középpontok S_2 síkja mélyebbre kerül, és várhatóan több gömböt tehetünk a hengerbe. Ekkor O_4-nek S_1-en levő O_4^* vetülete az O_1O_2 szakasz felező merőlegesén lesz, hiszen az $O_4O_1 = O_4O_2 = 2r$ szakaszok vetületei is egyenlők, másrészt O_4^* az edény falától r távolságban, vagyis a k_1-en lesz. Így $O_4^*O_2 = r_1$, tehát az S_1, S_2 síkok magasságkülönbsége az $O_4O_2O_4^*$ derékszögű háromszögből:

$$d = \sqrt{(2r)^2 - r_1^2} = r\sqrt{\frac{8}{3}}\,(= 1{,}6330r = 31{,}027 \text{ egység}).$$



A további rétegeket ugyanígy illesztve egymás fölé, a legfelső (az n-edik) rétegbeli 3 gömbközéppont S_n síkja legföljebb $m - r$ magasságban lehet, ahol m a henger (belső) magassága, különben az edény nem zárható le. Így az első réteget követő rétegek száma annyi, mint az $(m - 2r) : d$ hányados egész része:

$$n - 1 = \left[\frac{m - 2r}{d}\right] = \left[\frac{187}{31{,}027}\right] = 6,$$

tehát az edényben $7 \cdot 3 = 21$ db mindenesetre elhelyezhető gömbjeink közül.

Megjegyzések. **1.** Nem kapunk jobb elhelyezést, ha az első három gömböt úgy lazítjuk, hogy érintsék a henger falát. Ekkor az egyes rétegek ugyan lejjebb kerülnek, de (amint az némi számítással ellenőrizhető) így is csak hét réteg fér el a hengerben. Természetesen ha a henger igen magas lenne, ezt a kis módosítást is célszerű volna figyelembe venni.

2. Elhelyezhetnénk a gömböket úgy is, hogy két, 3–3 gömböt tartalmazó gyűrű közé egy (mind a 6 gömböt érintő) gömböt teszünk. Ehhez azonban annyira meg kellene növelnünk a gyűrűk távolságát, hogy végül is kevesebb gömb férne a hengerbe.

3. Feladatunk „Hány gömböt lehet elhelyezni?” kérdését megoldásunkban így értelmeztük: „Helyezzünk el a hengerben lehetőleg sokat az adott gömbökből.” Eszerint elfogadható megoldás volna, ha a második gyűrűt nem forgatnánk el úgy, hogy beékelődjön az első gyűrű hézagaiba, és csak 15 gömböt helyeznénk el. Persze a „lehetőleg sokat” kérés szerint ezt a megoldást kisebb értékűnek tekinthetjük, mint a fenti megoldást. Nem sokat növel megoldásunk értékén az a körülmény, hogy azt sejtjük, 21-nél több gömböt nem lehet elhelyezni a hengerben. Lényeges többlet ennek bizonyítása volna, ezt azonban a megoldásunk a fenti megjegyzésekkel együtt sem tartalmazza. Ez a bizonyítás túllépné lapunk kereteit, versenyzőinktől sem vártuk annak megadását. (Itt jegyezzük meg, hogy nem tartanánk helyesnek, ha mindig teljesen egyértelműen megfogalmaznánk, mit tekintünk az egyes feladatok teljes megoldásának. Megoldóinkat arra is nevelni szeretnénk, maguk döntsék el, mit kell az egyes helyzetekben tenniük: úgy érezzük, ezzel közelebb hozzuk gondolkodásukat a gyakorlatban, a hétköznapi életben felmerülő problémákhoz.)