A XII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát a *Magyar Népköztársaság Művelődésügyi Minisztériuma* rendezte Keszthelyen és Budapesten 1970. július 7 – 21. között. A versenyen 14 csapat vett részt 8 – 8 tanulóval: angol, bolgár, csehszlovák, francia, holland, jugoszláv, lengyel, magyar, mongol, német (NDK), osztrák, román, svéd és szovjet csapat. Július 13-án és 14-én írtak egy – egy dolgozatot, 3 – 3 feladatra 4 – 4 órai munkaidő állt rendelkezésre. A feladatok a következők voltak:

Első nap. 1. Legyen M az ABC háromszög AB oldalának valamely belső pontja. Jelölje r_1, r_2 és r rendre az AMC, BMC, ill. ABC háromszögbe írható kör sugarát, továbbá ϱ_1 az AMC háromszög AM oldalához, ϱ_2 a BMC háromszög BM oldalához, végül ϱ az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt kör sugarát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az $\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$ egyenlőség.

2. Jelentsenek a, b és n 1-nél nagyobb természetes számokat; közülük a és b két számrendszer alapszáma. Az $x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ alakú szám értéke az a alapú számrendszerben A_n, a b alapúban B_n, ahol $x_n \neq 0$ és $x_{n-1} \neq 0$. Az első, x_n számjegy elhagyásával keletkező számok A_{n-1}, ill. B_{n-1}.

Bizonyítsuk be, hogy az $a > b$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

3. Az a_0, a_1, a_2, …, a_n, … valós számokból álló sorozat eleget tesz az

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \tag{1}$$

egyenlőtlenség-láncnak.

Ezután a b_1, b_2, …, b_n, … sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$b_n = \sum_{k-1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

I. a $0 \leqq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár minden n-értékre fennáll;

II. bármely adott és a $0 \leq c < 2$ egyenlőtlenségpárt kielégítő c valós szám esetén létezik olyan, az (1) egyenlőtlenség-láncnak eleget tevő a_0,a_1, a_2, …, a_n, … sorozat, hogy a belőle képezett b_n számok közül végtelen sok nagyobb c-nél.

Második nap. 4. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amely a következő tulajdonságú:

Az $\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$. halmaz úgy bontható fel két, közös elemet nem tartalmazó és nem üres részhalmazra, hogy az egyik részhalmaz elemeinek szorzata egyenlő a másik részhalmaz elemeinek szorzatával.

5. Az $ABCD$ tetraéderben a BDC szög derékszög. AD csúcsból az ABC síkra bocsátott merőleges talppontja egybeesik az ABC háromszög magasságpontjával. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(AB + BC + CA)^2 \leqq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Mely tetraéderek esetén érvényes itt az egyenlőségjel?

6. Adott a síkban 100 pont; közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Tekintsük az összes lehetséges háromszöget, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók.

Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a háromszögeknek legfeljebb 70%-a hegyesszögű.

Az egymás utáni feladatok teljes megoldásával rendre 5, 7, 8, 6, 6, 8 pontot szerezhettek a versenyzők. A 40 – 37 pontot elért versenyzők – számszerint 7-en – I. díjban részesültek, a 36 – 30, ill. 29 – 19 pontot elértek II., ill. III. díjban, számuk 11, ill. 40 volt. Különdíjban 6-an részesültek (7 díj).

A magyar versenyzők közül I. díjban részesültek: *Ruzsa Imre* (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimn., 40 pont), egyszersmind két különdíjban részesült a 4. és a 6. feladat szép megoldásáért; továbbá *Bajmóczy Ervin* (Fazekas, 39 pont), különdíj a 6. feladat szép megoldásáért; végül *Gönczi István* (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 37 pont).

II. díjat nyert *Füredi Zoltán* (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, 32 pont).

III. díjat nyertek: *Lempert László* (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn., 25 pont), *Kóczy László* (Fazekas, 24 pont) és *Borzsák Péter* (Budapest, I. István Gimn., 20 pont).

Bár a verseny – az eddigi szokáshoz csatlakozva – egyéni volt, a külföldi folyóiratokban kialakult szokást követve mi is közlünk összesítést az egyes csapatok teljesítményéről. Közöljük a csapatok tagjai által elért összpontszámokat és zárójelben az elért I., II. és III. díjak számát; a felsorolás rendje az államok magyar nevének alfabetikus sorrendje. Anglia 180 (1, 0, 6), Bulgária 145 (0, 0, 3), Csehszlovákia 145 (0, 0, 4), Franciaország 141 (0, 1, 4), Hollandia 87 (0, 0, 1), Jugoszlávia 209 (0, 3, 3), Lengyelország 105 (0, 0, 1), Magyarország 233 (3, 1, 3), Mongólia 78 (0, 0, 1), Német Demokratikus Köztársaság 221 (1, 2, 4), Románia 208 (0, 3, 4), Svédország 110 (0, 0, 2), Szovjetunió 221 (2, 1, 3).