Az 1710. feladatban[1] azt találtuk, hogy ha

$$\frac{x}{\sin t} = \frac{y}{\sin 2t} = \frac{z}{\sin 3t},$$

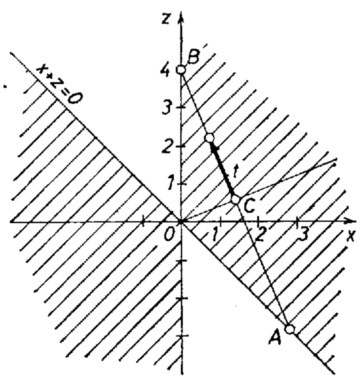
akkor x, y és z között a következő összefüggés áll fenn:

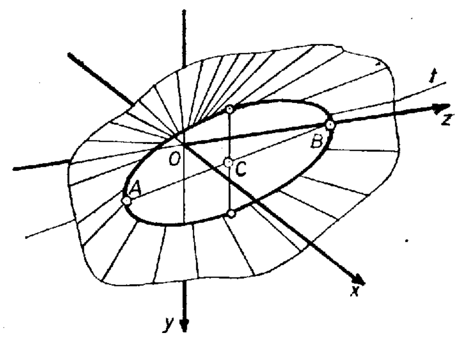
$$x^2 - y^2 + xz = 0.$$

Megvizsgáljuk, melyek azok a pontok a térbeli derékszögű koordinátarendszerben, melyek koordinátái eleget tesznek ennek. Átrendezve kapjuk, hogy

$$y^2 = x(x+z). \tag{1}$$

Ha tehát az x, z tengelyek által meghatározott síkot vesszük alapsíknak, e sík minden pontjában meghatározhatjuk y megfelelő értékét, és ezt felfelé is, lefelé is felmérve egy felületet kapunk. Természetesen az x, z síknak csak azokhoz a pontjaihoz rendel (1) y-t, melyekben $x(x+z)$ nem negatív. E szorzat első tényezője a z tengelytől jobbra pozitív, balra negatív, a második tényező az $x+z=0$ egyenes felett pozitív, alatta negatív, az (1) függvény értelmezési tartománya tehát az $x+z=0$ egyenes és a z tengely által meghatározott 4 szögtartomány közül az, amelyik az első síknegyedet tartalmazza, és ennek csúcsszögtartománya.





Ha egy $P(x_0,\, y_0,\, z_0)$ pont a vizsgált felülethez tartozik, akkor a felületen van a $P'(\lambda x_0,\, \lambda y_0,\, \lambda z_0)$ pont is, ahol λ tetszőleges valós szám, hiszen ha P koordinátáira teljesül (1), akkor P' koordinátáira is teljesül.

Megvizsgáljuk a felületnek azt a metszetét, amelyet az $(x,\, z)$ sík egy alkalmasan választott egyenesén át e síkra merőlegesen állított sík metsz ki belőle. Erre a célra az értelmezési tartományt határoló egyenesek szögfelezőjére merőleges egyenest veszünk fel. Felmérünk mondjuk 4 egységet ezekre az egyenesekre az origóból kiindulva, kapjuk az $A(2\sqrt{2};\, -2\sqrt{2})$, $B(0;\, 4)$ pontokat. Ekkor az AB szakasz felezőpontja $C(\sqrt{2},\, 2-\sqrt{2})$, és e szakasz egy tetszőleges pontjának koordinátái

$$x = \sqrt{2} + t(-\sqrt{2}),$$
$$z = (2-\sqrt{2}) + t(2+\sqrt{2}),$$

ahol $-1 \le t \le 1$. Ebben a pontban y^2 értéke:

$$y^2 = x(x+z) = \sqrt{2}(1-t)\cdot 2(1+t) = 2\sqrt{2}(1-t^2).$$

Eszerint t és y között az

$$\frac{y^2}{2\sqrt{2}} + t^2 = 1$$

összefüggés áll fenn, a metszet tehát ellipszis, melynek egyik tengelye az AB szakasz (most t tengely), másik tengelye az $(x,\, z)$ síkra C-ben emelt merőlegesen van. (Az ellipszis tengelyeinek arányát nem vizsgáljuk, mert a t tengely egysége nem azonos az y tengely egységével.)

Előrebocsátott észrevételünk alapján a vizsgált felület egy olyan kettőskúp, melynek „alapja” ez az ellipszis, és csúcsa az origó.

[1] Lásd a megoldást ezen számban, 128. o.