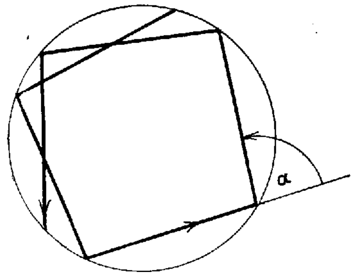
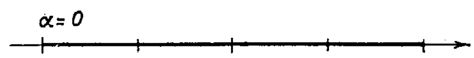
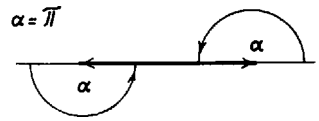
Könnyű belátni, hogy ha egy irányított töröttvonal szakaszai egyenlők, és az egymás utáni szakaszok irányított α törésszögei egyenlők, akkor a töréspontok egy körön helyezkednek el (1. ábra), kivéve, ha $\alpha = 0$, illetve $\alpha = \pi$, ugyanis ekkor a töréspontok egy egyenesen, illetve két pontban lesznek (2., illetve 3. ábra).



1. ábra

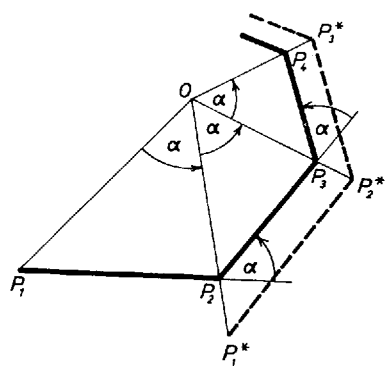


2. ábra



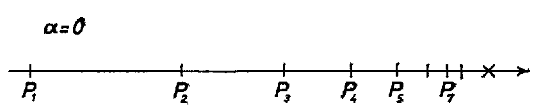
3. ábra

Tekintsünk most olyan, egyik irányban végtelen (a másik irányban véges) $P_1P_2 \ldots P_n \ldots$ töröttvonalat, melynek törésszögei szintén egyenlők, de bármely $i = 2, \ldots, n, \ldots$ indexre $P_iP_{i+1} : P_{i-1}P_i = k$, állandó és $0 < k < 1$ (7. ábra).

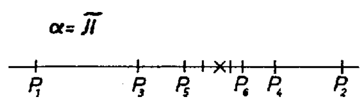


7. ábra

Könnyű belátni, hogy ezen töröttvonal töréspontjaiból alkotott halmaznak az $\alpha = 0$, és az $\alpha = \pi$ esetben van egy és csak egy torlódási pontja[1] (4., illetve 5. ábra).



4. ábra

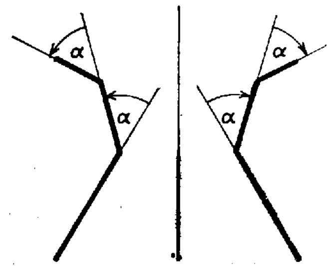


5. ábra

Bebizonyítjuk, hogy a töréspontok halmazának tetszőleges α mellett is egy és csak egy torlódási pontja van.

Elég azzal az esettel foglalkozni, amikor α konvex szög; ha ugyanis $\pi < \alpha < 2\pi$, akkor a töröttvonalat a sík tetszőleges egyenesére tengelyesen tükrözve olyan töröttvonalat kapunk, melyben a szakaszok hossza kielégíti a fenti feltételt, és a törésszögek konvex szögek lesznek (6. ábra).

[1] Ponthalmaz torlódási pontjának olyan pontot nevezünk, mely körül írt tetszőleges sugarú körben – magán a torlódási ponton kívül – a ponthalmaznak legalább egy pontja helyezkedik el. (A torlódási pont nem feltétlenül eleme a ponthalmaznak.)



6. ábra

Ennek bizonyítására elég megjegyezni, hogy a tengelyes szimmetria távolság- és szögtartó, de az irányított szögek előjelét megváltoztatja. Legyen tehát $0 < \alpha < \pi$.

Töröttvonalunk értelmezéséből következik, hogy a $P_1P_2\ldots$ és a $P_2P_3\ldots$ töröttvonalak hasonlók és a hasonlóság aránya $1:k$. A két töröttvonal azonos körüljárású, tehát megfelelő elforgatással és nagyítással egymásba vihető ($P_1P_2\ldots$-t visszük $P_2P_3\ldots$-be). Az egymásba transzformálandó szakaszok törésszöge α, ezért az elforgatás szöge is α lesz, a nagyítás aránya pedig nyilván k (tulajdonképpen kicsinyítés).

Próbáljuk meg a transzformációt úgy végrehajtani, hogy a forgatás és a nyújtás centruma azonos legyen. Jelöljük az e körül elforgatott töröttvonalat $P_1^*P_2^*\ldots$-gal. E célra olyan O pontot kell keresni, mely körül forgatva az O, P_2, P_1^* és az O, P_3, P_2^* ponthármasok egy-egy egyenesre esnek, ugyanis ekkor a nyújtással P_1^* a P_2-be, P_2^* a P_3-ba kerül, $\ldots$, tehát ez a transzformáció megfelel feltételeinknek.

Ha O olyan pont, hogy

(1) $$P_1OP_2\sphericalangle = P_2OP_3\sphericalangle = \alpha,$$

akkor a forgatás után az O, P_2, P_1^* és az O, P_3, P_2^* ponthármasok valóban egy-egy egyenesen lesznek. (1)-et kielégítő O pont látókörök segítségével mindig szerkeszthető, tehát van olyan pont, mely körül elforgatva, majd ezen pontból mint centrumból vetítve, a $P_1P_2\ldots$ töröttvonal $P_2P_3\ldots$-ba transzformálható.

Azt mutatjuk meg, hogy ez az O pont a töröttvonalnak torlódási pontja. Az elforgatás távolságtartó, a nagyítás aránya pedig k, tehát tetszőleges i mellett ($i = 1,\ 2,\ \ldots$) $OP_{i+1} : OP_i = k$, ebből

$$OP_n : OP_1 = k \cdot OP_{n-1} : OP_1 = k^2 \cdot OP_{n-2} : OP_1 = \ldots = k^{n-1} \cdot OP_1 : OP_1 = k^{n-1},$$

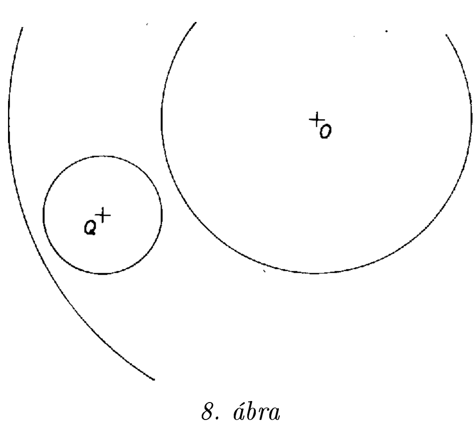
vagyis

$$OP_n = k^{n-1} \cdot OP_1.$$

$0 < k < 1$, és OP_1 véges szám, tehát n növekedtével $OP_n \to 0$, eszerint az O körül írt tetszés szerinti sugarú körben valóban van töröttvonalbeli töréspont. Ezzel állításunk első felének bizonyítását befejeztük.

Nyilvánvaló, hogy a torlódási pont akkor is létezik, ha a töröttvonal ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint eddig, de mindkét irányban végtelen. A továbbiakban ilyen töröttvonalakkal foglalkozunk. Ebben az esetben a $0 < k < 1$ megszorítás sem szükséges, elegendő a $0 < k \neq 1$ kikötés. Bebizonyítjuk, hogy a töröttvonalnak csak egy torlódási pontja van.

A bizonyítást indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy Q a töréspontok halmazának – O-tól különböző torlódási pontja. Húzzunk Q középponttal olyan sugarú kört, hogy O a körön kívül essék. Vegyünk fel továbbá olyan, O középpontú körgyűrűt, mely tartalmazza a Q középpontú kört (8. ábra).



8. ábra

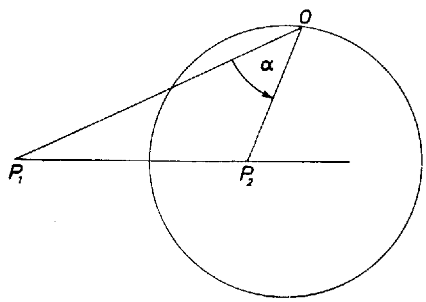
Két pozitív szám között egy mértani sorozatnak csak véges sok különböző tagja lehet (a hányados nem 1). Az OP_i távolságok mind különbözőek és mértani sorozatot alkotnak, tehát a körgyűrűben legfeljebb véges sok töréspont helyezkedik el. A Q középpontú körben van Q-tól különböző töréspont, hiszen Q torlódási pont, de a töréspontok száma véges. Akkor viszont van közöttük olyan, melynek Q-tól mért távolsága a legkisebb. Az ennél a távolságnál kisebb sugarú, Q középpontú körben már nincs a Q-tól különböző töréspont, tehát Q nem lehet torlódási pont. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a töröttvonalnak egy és csak egy torlódási pontja van.

Nézzük meg, milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a pont.

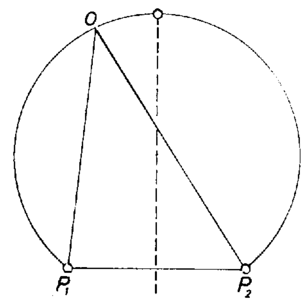
Rögzítsük a töröttvonal egy tetszés szerinti szakaszát (legyen ez P_1P_2), és k értékét. Bebizonyítjuk, hogy ha az α törésszög 0 és 2π között változik, akkor a torlódási pontok mértani helye egy kör.

A $0 < \alpha < \pi$ esetben láttuk, hogy $OP_1 : OP_2 = k$. Egy korábbi állításunk értelmében ez az arány a $\pi < \alpha < 2\pi$ esetben is fennáll, és könnyen utánaszámolhatunk, hogy az $\alpha = 0$ és $\alpha = \pi$ esetben is igaz.

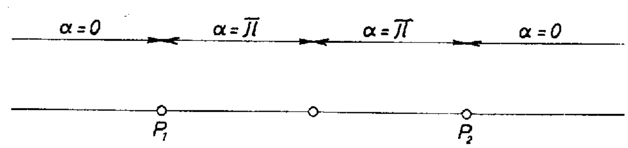
Ekkor viszont az O pont az úgynevezett Apollonius-féle körön helyezkedik el. Ezen kör minden pontja a mértani helyhez tartozik, hiszen a kör tetszőleges pontja meghatározza a $P_1OP_2\sphericalangle = \alpha$ szöget, és az α törésszögű töröttvonal torlódási pontja éppen a körön kiválasztott pont lesz. Tehát a kérdéses mértani hely valóban egy kör (9. ábra).



9. ábra



10. ábra



11. ábra

Ha most a töröttvonal egy rögzített szakasza mellett a törésszög állandó és k értéke változik, akkor a torlódási pontok mértani helye egy körív a két végpont és a körív ívfelező pontja nélkül, illetve $\alpha = 0$ esetben két félegyenes a végpontok nélkül és $\alpha = \pi$ esetben egy szakasz a végpontok és a szakaszfelezőpont nélkül.

Állításunk következik abból, hogy $P_1OP_2\sphericalangle = \alpha$, tehát $0 < \alpha < \pi$ esetben O egy köríven helyezkedik el. (Azért nem két köríven, mert α irányított szög.) Ennek a körívnek azok a pontjai nem tartoznak a mértani helyhez, melyekre $OP_1 : OP_2 = 0, \infty$, vagy 1 (10. ábra).

Ha $\pi < \alpha < 2\pi$, akkor az előző esetből P_1P_2 egyenesére való tükrözéssel nyerjük a megoldást.

$\alpha = 0$, illetve $\alpha = \pi$ esetben a P_1P_2 egyenesen helyezkednek el a torlódási pontok a P_1P_2 szakaszon kívül, illetve belül. Csak azok a pontok nem tartoznak a mértani helyhez, melyekre $OP_1 : OP_2 = 0, \infty$, vagy 1 (11. ábra).